Yannick Fritschy

GRENSVERLEGGENDE getallen

New Scientist
Pocket Science

Over
0, 1, i, ∞
en andere
wiskundige
grootheden

Reeds verschenen in de serie Pocket Science

De quantumcomputer – een digitale revolutie op het punt van uitbreken, George van Hal (juli 2017)

Ruimtetijd – hoe Einstein het heelal een vierde dimensie gaf, Yannick Fritschy (september 2017)

Exoplaneten – de zoektocht naar nieuwe werelden, Joris Janssen (januari 2018)

Telescopen van de toekomst – de nieuwe grote ogen van de astronomie, Govert Schilling (maart 2018)

DNA-bewerking – knippen en plakken met CRISPR/Cas9, Kristel Kleijer (september 2018)

Sociale robotica – de onstuitbare opmars van menselijke machines, Sebastiaan van de Water (november 2018)

Het trillende universum – over snaartheorie, deeltjes en verborgen dimensies, Martijn van Calmthout (maart 2019)

Tossen met de kosmos – over entropie en de statistiek van het heelal, George van Hal (mei 2019)

De stam van het woord – over taalevolutie en de eerste taal ter wereld, Yannick Fritschy (november 2019)

Kweekvlees, fake vlees en pizza's uit de printer – over het voedsel van de toekomst, Sebastiaan van de Water (maart 2020)

R.I.P. heelal –over het einde van het universum, Ans Hekkenberg (juni 2020)

Binnenkort verkrijgbaar in de serie Pocket Science

De fusiedroom – feiten en fabels over een veelbelovende energiebron, Jean-Paul Keulen (april 2021)

Meer informatie: pocketscience.nl

Van de makers van
NewScientist

Inhoud

0.

$111 \times 111 = 12321$. Een paar jaar geleden zag ik deze som staan in het prachtige kinderboek *De telduivel,* over een duivel die een jongetje in zijn dromen bezoekt en hem inwijdt in de mysterieuze wereld van de getallen. De som herinnerde me eraan hoe ik als kind urenlang met een rekenmachine kon spelen. En dan geen spelletjes zoals Tetris en Snake – dat kwam later pas. Nee, simpel rekenwerk was voor mij al een bron van vermaak. $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 1024$ – ik kan de machten van twee nog altijd uit mijn hoofd opzeggen. $1 \div 9 = 0{,}11111111$. $8 \div 0 =$ ERROR. $999999999 \times 999999999 =$ 1E18, wat dat ook betekenen mocht…

Later leerde ik als student natuurkunde dat getallen niet alleen leuk zijn om mee te spelen, maar ook heel handig om de wereld mee te beschrijven. En dan niet alleen de bekende getallen; ook bijvoorbeeld het 'imaginaire' getal i, zeg maar de wortel van min één. Mijn oude rekenmachine zou ERROR aangeven als je dat probeert uit te rekenen. Maar wiskundigen hebben ooit domweg besloten dat zo'n getal wel bestaat, en nu lossen we dankzij i allerlei sommen op over wisselstroom en quantumdeeltjes.

In dit boekje wil ik laten zien hoe getalsuitvindingen onze kijk op de wereld volledig kunnen veranderen. Het gaat dan om nieuwe manieren om getallen op te schrijven, zoals het briljante Babylonische spijkersysteem, dat de opmaat vormde voor onze huidige cijfers. Maar ook om cruciale nieuwe getallen: zo maken we nog maar een paar eeuwen volop gebruik van het getal nul. En hoe zouden we virusverspreiding moeten beschrijven zonder e, het getal dat exponentiële groei aanduidt?

Aan de hand van die revolutionaire uitvindingen hoop ik ook een inkijkje te geven in wat getallen eigenlijk zíjn. Want getallen, en dan met name de grensverleggende exemplaren, zijn veel meer dan een manier om aan te geven hoeveel appels je in je fruitschaal hebt. Ze komen voor in allerlei gedaantes: groot, klein, mooi, lelijk, simpel en volstrekt onbevattelijk. Ook hebben ze vaak een onverwachte band met de natuur, zoals de gulden snede die je in madeliefjes terugziet.

Veel populairwetenschappelijke wiskundeboekjes richten zich vooral op de toepassingen van getallen in het dagelijks leven. Ik wil juist de wat minder alledaagse toepassing laten zien: hoe belangrijk inzicht in getallen is bij het ontrafelen van de structuur van het universum. Want wiskunde is de taal van de natuur, en getallen zijn de woorden waaruit die taal is opgebouwd. Hoe meer woorden je kent, en hoe beter je hun betekenis snapt, hoe beter je de natuur kunt beschrijven.

Daarmee heeft dit boekje geen direct praktisch nut; sorry daarvoor. Je leert geen manieren om rijk te worden op de beurs of sudoku’s sneller op te lossen. Waarschijnlijk ben je na het lezen niet veel beter in wiskunde dan ervoor. Ik kan alleen maar hopen dat je getallen dan wel (nog) leuker bent gaan vinden.

Aangezien het boekje om getallen draait, bevat het weinig driehoeken en cirkels. Wel zit er een lijn in, en die is min of meer chronologisch. De eerste twee hoofdstukken gaan over het allereerste gebruik van getallen: in spraak, met oeroude telwoorden, en in schrift, met turfstreepjes. Je leest bijvoorbeeld over een prehistorisch bavianenbot dat werd gebruikt als een pen met een rekenkundig spiekbriefje.

Daarna volgen twee historische systemen om getallen op te schrijven. We kennen allemaal de Romeinse cijfers, die in Europa zo'n MMD jaar de boventoon voerden. Maar eigenlijk waren die vrij waardeloos ten opzichte van het veel oudere Babylonische systeem. Daarmee konden de Babyloniërs ruim duizend jaar voor de geboorte van Pythagoras al getallen uitrekenen die aan diens beroemde stelling voldoen!

Het eerste deel eindigt met een karrenvracht aan andere getallenstelsels die zo nu en dan gebruikt worden. Denk aan de binaire getallen waarop onze computers draaien, of een 34-tallig systeem dat een Papoeavolk gebruikt omdat de mannen er niet alleen op hun vingers, maar ook op hun testikels tellen.

In deel 2 gaan we van getallenstelsels naar de getallen zelf. Je leest in hoofdstuk 6 en 7 waarom de nul en de negatieve getallen gezien werden als duivelskunst en zelfs een tijdlang verboden waren. Vervolgens vertelt het hoofdstuk over de 'irrationalen' hoe de wortel van twee tot een moord leidde en waarom de gulden snede wordt overschat.

Hoofdstuk 9 gaat over de imaginaire getallen, en de bijbehorende formule die zelfs onder wiskundigen heftige emoties doet oplaaien. Daarna volgt het waarschijnlijk meest onbevattelijke hoofdstuk over oneindigheid, dat beschrijft hoe een deel even groot kan zijn als het geheel, en waarom zelfs oneindig niet het grootst mogelijke getal is.

Aan het eind van dit boek komen de wat meer filosofische kwesties aan bod. Hoofdstuk 11 gaat over de vraag wat getallen eigenlijk zijn, en waarom een stel wetenschappers de som 1 + 1 = 2 opnieuw onder de loep nam. De e-π-loog draait tot slot om de vraag: waarom kunnen getallen zo belachelijk goed de natuur beschrijven?

Getallen zijn natuurlijk enorm abstract. Bovendien zijn ze, zoals je bij het lezen zult merken, in de loop van de geschiedenis steeds abstracter geworden. Via de historische invalshoek heb ik geprobeerd het boekje toch zo concreet mogelijk te houden. Het bevat uiteraard een hoop getallen en her en der ook wat formules en sommetjes, maar die zijn met kennis uit de middelbare school prima te begrijpen, en anders kunnen ze probleemloos worden overgeslagen.

Wel ben ik net als de Telduivel soms geneigd mijn toehoorders te overstelpen met informatie. Er is ook zoveel te vertellen, en een honderdtal pagina's is in ons getallenstelsel vrij weinig. Maar ik heb goede hoop dat het voor wiskundeleken allemaal nog net te behappen is, en dat ook de mensen met enige voorkennis er nieuwe dingen uit zullen halen. Hierbij vraag ik die laatste groep alvast om begrip dat ik soms wat wiskundige bochten afsnij; ik blijf nu eenmaal een natuurkundige. En mits niet al te onvriendelijk geformuleerd, ben ik ontvankelijk voor commentaar.

Tot slot wil ik iedereen bedanken die heeft meegeholpen aan dit boekje, en dan met name de collega's van *New Scientist*. Ook bedank ik de mensen die tienduizend jaar geleden nieuwe symbolen voor getallen gingen invoeren, want zonder die uitvinding hadden we nu misschien wel helemaal geen boeken. En ik bedank alvast jullie, lieve lezers, die het in ieder geval tot het eind van de intro hebben volgehouden. Degenen die doorlezen wens ik overaftelbaar oneindig veel leesplezier.

Yannick Fritschy
IX / 11111100100

DEEL 1

Nieuwe getallenstelsels

1.

Eén plus één is twee

Een boer had ooit last van een kraai die een nest had gemaakt op zijn hooizolder. De boer wilde de kraai neerschieten, maar telkens wanneer hij op zolder kwam, vloog de kraai tussen de dakpannen door naar buiten. Pas wanneer de boer weer de trap af was gegaan, kwam de kraai terug.

De boer bedacht daarom een list: hij ging samen met een knecht naar de zolder en verstopte zich. Vervolgens ging de knecht alleen naar beneden. ‘Nu denkt de kraai vast dat de zolder leeg is’, dacht de boer. Maar de kraai had het door: hij keerde pas terug naar zijn nest toen ook de boer weg was. De dag erna ging de boer met twee knechten naar boven en bleef hij zelf weer achter. Maar ook dat werkte niet. En ook met drie knechten had hij geen succes.

De dag daarna ging de boer met vier knechten naar de zolder. En toen werkte de list wel. Zodra de vier knechten naar beneden waren gegaan, keerde de kraai terug naar zijn nest. De achtergebleven boer schoot hem neer. Eind goed, al goed – behalve voor de kraai, maar dat was toch een rotbeest.

De moraal van het verhaal? Mensen kunnen veel beter tellen dan dieren. De kraai kon weliswaar niks, één, twee, drie en ‘veel’ onderscheiden, maar het verschil tussen vier en vijf was hem te machtig.[1] Datzelfde geldt voor andere slimme dieren zoals apen, bijen en papegaaien, en zelfs kikkers, guppy's en spinnen: ze kunnen lage aantallen van elkaar onderscheiden, maar bij hogere aantallen gaat het mis.

En als dit ze soms toch lukt, dan is er geen sprake van getalsbegrip, maar van een aangeleerd kunstje. Een beroemd voorbeeld is het Duitse paard Kluger Hans. Dit paard leek sommen uit te kunnen rekenen door een aantal keer met zijn hoef op de grond te kloppen. Later bleek dat hij vooral goed op zijn baas lette: de baas veranderde bewust of onbewust van houding wanneer Hans moest stoppen met kloppen. Chimpansees zijn tot soortgelijke kunstjes in staat: die kunnen weliswaar leren dat zeven stippen op een scherm overeenkomt met het cijfer 7, maar daarmee snappen ze nog niet dat het getal zeven tussen zes en acht ligt.

Hebben wij mensen van nature een superieur getalsvermogen? Nou, dat niet. Een kind van drie kan met moeite hardop tot vijf tellen. En het koppelen van getallen aan hoeveelheden – hoeveel appels zijn dit? – lukt op die leeftijd meestal maar tot en met vier. Ook volwassenen zijn daar eigenlijk niet zo heel goed in. Dat blijkt uit een experiment waarbij mensen een bepaald aantal stippen te zien kregen. Ze moesten zo snel mogelijk aangeven hoeveel stippen ze zagen. Wat bleek? Tot en met drie ging dat prima, maar bij vier en vijf duurde het aanmerkelijk langer.

Van nature is ons getalsbegrip dus niet veel beter dan dat van een aap of kraai. Maar wij mensen zijn inventief. We

1 Komt hier de naam van de band *Counting Crows* vandaan? Nee, helaas niet; die is gebaseerd op een oud liedje over de omineuze betekenis van een bepaald aantal eksters, een vogel uit de kraaienfamilie. De bandnaam betekent dus niet 'tellende kraaien', maar 'kraaien tellen' als in 'schaapjes tellen'.

Getallen versus cijfers

Een **getal** is een aanduiding van een bepaalde hoeveelheid. Een **cijfer** is een symbool waarmee je getallen kunt weergeven.

Drie is dus wel een getal, maar geen cijfer. 3 is zowel een cijfer als een getal. En 13 is een getal dat uit twee cijfers bestaat.

hebben een trucje ontwikkeld om aantallen te onderscheiden, namelijk tellen. En dat trucje gebruiken we voortdurend. We leren het aan onze kinderen, via iconische figuren zoals Graaf Tel uit Sesamstraat.[2] We tellen schaapjes om in slaap te vallen, we tellen tot tien bij een dreigende woede-uitbarsting. We passen op onze tellen, we tellen onze winst uit en als we gewaarschuwd zijn, dan tellen we zelfs voor twee.

Onze drang om steeds verder te tellen heeft in de loop van de geschiedenis geleid tot een ingenieus systeem dat we nu op schrift uitdrukken met de cijfers 0 tot en met 9. Dankzij dat zogeheten getallenstelsel kunnen we zo ver doortellen als we willen. Het duurt even, maar als het moet kunnen we zeshonderd stippen op een scherm identificeren. Bovendien snappen we dat dit er tien keer zoveel zijn als zestig stippen, of honderd minder dan zevenhonderd. Dankzij dit bijkomende getalsbegrip kunnen we met ons getallenstelsel van alles uitrekenen – van de prijs van een tros bananen tot de uitdijingssnelheid van het heelal.

2 Die volgens Wikipedia lijdt aan aritmomanie, oftewel een dwangmatige behoefte om alles te tellen – een veelvoorkomende aandoening onder vampiers.

4.

Je hebt het je vast weleens afgevraagd (en zo niet, dan wel nu): waarom gaan er zestig minuten in een uur en zestig seconden in een minuut? Waarom niet honderd minuten en honderd seconden? Dat zijn toch veel logischere getallen?

Dat dachten de Franse bewindvoerders in 1793 ook. Ze zaten midden in hun Revolutie, en alles wat herinnerde aan de oude tijd moest op de schop. Inclusief de tijd zelf. Vanaf 1794 zaten er tien uur in een etmaal, honderd minuten in een uur en honderd seconden in een minuut. Een seconde duurde daarmee een fractie korter dan de huidige seconde, een minuut was ongeveer anderhalf keer zo lang en een uur tweeënhalf keer zo lang.

Vergelijkbare eenheden dus, en het rekent een stuk makkelijker. Maar het volk kon er niet aan wennen – er ontstond een soort Babylonische tijdsverwarring. Een paar jaar later werd de klok alweer teruggedraaid en werd de 'decimale tijd' vervangen door het systeem dat we nu nog steeds hebben. Een systeem dat heel lang geleden werd ontwikkeld, en wat mij betreft een van de knapste uitvindingen ooit is.

Onze tijdseenheden komen namelijk uit het Babylonische getallenstelsel. Dat is al in het derde millennium voor Christus ontwikkeld door de Soemeriërs, een volk uit het huidige

Zuidoost-Irak. Toen de Babyloniërs de heerschappij in dat gebied overnamen, zijn die ermee aan de haal gegaan. En met succes: tweeduizend jaar lang waren ze hun tijd ver vooruit.

Het Babylonische getallenstelsel is gebaseerd op slechts twee tekens: een 'spijker' en een 'winkelhaak'. Een spijker geeft het getal één aan, een winkelhaak tien. Het getal acht geef je aan met acht spijkers, 46 met vier winkelhaken en zes spijkers. Tot zover is het dus gewoon een turfsysteem waarbij je van elke tien turfjes een winkelhaak maakt. Verder schreven de Babyloniërs meerdere spijkers en winkelhaken als één compact symbool. Een compact turfsysteem dus.

Maar als je met duizendtallen gaat werken, zou zo'n systeem alsnog enorme kleitabletten vergen. En bovendien kun je met een turfsysteem niet lekker rekenen – dat zag je aan de Romeinse cijfers. Het briljante van het Babylonische systeem zit dan ook niet in de spijkers en de winkelhaken. Het zit in wat er gebeurt als je boven de zestig komt.

Het getal zestig gaven de Babyloniërs namelijk niet weer met zes winkelhaken, maar met één spijker. Net als het getal één. Het begint gewoon weer opnieuw. 61 is dan een spijker en rechts daarvan nog een spijker. 87 is een spijker, gevolgd door een combinatie van twee winkelhaken en zeven spijkers.

Doordat een winkelhaak tien aangeeft, lijkt het Babylonische systeem op het eerste gezicht misschien tientallig. Maar het is een zestigtallig stelsel. Er zijn namelijk verschillende symbolen voor de getallen 1 tot en met 59. Vanaf zestig worden dezelfde symbolen hergebruikt, maar begint de plek ervan een rol te spelen. Een winkelhaak gevolgd door een spijker (10 + 1 = 11) is wat anders dan een spijker gevolgd door een winkelhaak (60 + 10 = 70).

De Soemeriërs en Babyloniërs schreven getallen op zoals je ze ook in een telraam weergeeft: rechts de eenheden, links daarvan de veelvouden. Zo hebben deze volkeren het eerste

9.

$i \times i = -1$

Wiskunde is emotie. In 2014 legde neurobioloog Semir Zeki vijftien wiskundigen onder een MRI-scanner. Hij liet ze zestig formules zien. Ondertussen mat hij de hersenactiviteit in de mediale orbitofrontale cortex, een gebied dat verband houdt met het ervaren van emoties. Dit gebied wordt bijvoorbeeld actiever wanneer je een schilderij bekijkt dat je mooi vindt, of muziek luistert waar je van houdt. In dit experiment was de activiteit in het emotionele hersengebied bij één formule duidelijk het grootst: de identiteit van Euler.

Niet gek, want deze vergelijking wordt door velen binnen en buiten de wiskunde gezien als de mooiste formule ooit. Ze is te zien op T-shirts, graffitimuren en tatoeages. En hier in dit hoofdstuk:

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Is het niet verbazingwekkend? De identiteit van Euler verenigt de vijf belangrijkste getallen in de wiskunde![28] En

28 Of vier, als je in het puristische kamp zit dat liever schrijft $e^{i\pi} = -1$. Opperwiskundepopularisator Ionica Smeets vergeleek de uitgebreide schrijfwijze eens denigrerend met de Engelse zin *The quick brown fox jumps over the lazy dog*, die alle letters van het alfabet bevat.

dat op een verbluffend simpele manier, met de drie belangrijkste wiskundige bewerkingen: optellen, vermenigvuldigen (i keer π) en machtsverheffen.[29] De formule is zelfs voor wiskundigen volstrekt onbevattelijk. Zoals de Amerikaan Benjamin Peirce ooit zei: 'We begrijpen het niet, we weten niet wat het betekent, maar we hebben het bewezen, en dus moet het wel waar zijn.'

Vier van de getallen in de formule kennen we al: de elementaire één, de nihilistische nul, de exponentiële e en de piekfijne π. Behalve één hebben al die getallen iets 'onnatuurlijks': het is raar om nul appels weg te geven, en nog raarder om e of π appels weg te geven. Maar in theorie kan dat allemaal wel. Het vijfde getal is zo onnatuurlijk, dat je het onmogelijk nog aan appels kunt relateren.

i is namelijk het getal dat vermenigvuldigd met zichzelf -1 oplevert: $i \times i = -1$. Je kunt i dus zien als de wortel van -1. Wiskundig gezien begeef je je daarmee wel op glad ijs, omdat je dan via de gangbare rekenregels kunt bewijzen dat -1 gelijk is aan 1. Maar voor het algemene begrip van i is dit best een goed uitgangspunt.

Gewoonlijk levert iets keer zichzelf nooit een negatief getal op. Plus keer plus is immers plus, min keer min is ook plus. En nul keer nul is nul. Wanneer je in je berekeningen op een negatief kwadraat uitkomt, bijvoorbeeld $x^2 = -9$, begin je doorgaans opnieuw om te kijken waar je de fout in bent gegaan. Of je focust op een andere, positieve oplossing, als die er is. Of je houdt er gedesillusioneerd mee op. Maar je gaat in elk geval niet verder.

In de zestiende eeuw hadden Italiaanse wiskundigen echter lak aan de aloude rekenregels. Ze introduceerden het

29 Of twee dus, als je in het puristische kamp zit. Ikzelf ben als taalfanaat trouwens dol op dat soort alfabetzinnen.