C.A.G. Koolen
Th.M. van Pelt
R.B.J. Pijlgroms
W.V. Smeets
J.L. Walter

Wiskunde

voor het hoger onderwijs

Uitwerkingen

en extra, praktijkgerichte vraagstukken

Deel 2

Noordhoff Uitgevers

Zesde druk

Wiskunde voor het hoger onderwijs

Deel 2

Uitwerkingen

Wiskunde voor het hoger onderwijs Deel 2

Uitwerkingen

C.A.G. Koolen

Th.M. van Pelt

R.B.J. Pijlgroms

W.V. Smeets

J.L. Walter

Noordhoff Uitgevers Groningen/Houten

Zesde druk

Ontwerp omslag: G2K designers Groningen
Omslagillustratie: Photodisc

Eventuele op- en aanmerkingen over deze of andere uitgaven kunt u richten aan:
Noordhoff Uitgevers bv, Afdeling Hoger Onderwijs, Antwoordnummer 13,
9700 VB Groningen, e-mail: info@noordhoff.nl

2 3 4 5 6 / 14 13 12 11 10

ISBN (ebook) 978 90 01 84961 0
ISBN 978 90 01 03342 2
NUR 120

Woord vooraf

In deze zesde druk van *Uitwerkingen* bij het leerboek *Wiskunde voor het hoger onderwijs, deel 2* zijn – zoals gewoonlijk – praktisch alle uitwerkingen van de opdrachten en vraagstukken opgenomen. Waar geen uitwerking is opgenomen is dit vermeld (geen uitwerking), is slechts het antwoord gegeven (veelal in de toetsen na leereenheden en in de eindtoets van een hoofdstuk).

De auteurs houden zich aanbevolen voor het ontvangen van op- en aanmerkingen en suggesties van gebruikers ter verbetering van de inhoud.
We hopen dat ook deze druk zijn weg zal vinden in het wiskundeonderwijs.

De auteurs,
zomer 2003

Studiewijzer

Beste student(e),

Een boek vol met uitwerkingen! Dat lijkt erg handig, maar je moet er wel verstandig mee omgaan. Wij denken dat dat het beste als volgt kan.
Ga ervan uit dat je het meeste leert door *zelf* de opdrachten en vraagstukken uit het boek te maken. Van de fouten die je daarbij maakt leer je veel over de stof en over jezelf. Maak die fouten dan ook eerst en bekijk *daarna* pas de uitwerkingen. Lees dus nooit de uitwerkingen van te voren door, want dan leer je zelf niet genoeg. De uitwerkingen in dit boek zijn slechts een onderdeel van de aanpak voor het oplossen van een vraagstuk.

Bij het oplossen van ingewikkelde vraagstukken moet meer gebeuren dan in het uitwerkingenboek staat. Je zult altijd eerst moeten nagaan wat er precies *gevraagd* wordt en wat de *gegevens* in het vraagstuk zijn. Het gevraagde zul je daarna vaak in verband moeten brengen met de gegevens, door gebruik te maken van de in het hoofdstuk behandelde begrippen en definities. De uitwerkingen in dit boek zijn slechts het zichtbare deel van de omgekeerde oplossingsroute: de weg van de gegevens naar het gevraagde. Het denkwerk vooraf (van het gevraagde naar de gegevens) staat er niet altijd bij, maar dat moet je wel altijd eerst uitvoeren.

Na afloop van je berekening of oplossing moet je ook altijd bekijken
- of de antwoorden 'ergens op lijken';
- of de uitkomst de orde van grootte heeft die je verwachtte:
- of het antwoord nog vereenvoudigd kan worden;
- of het antwoord klopt met dingen die je al wist;
- enzovoort.

Als je vastgelopen bent of geen begin kunt maken met de oplossing, kijk dan even kort naar de uitwerking, waardoor je vaak al snel een idee krijgt hoe je het vraagstuk moet aanpakken (hoe de oplossingsroute begint). Probeer het daarna weer zelf. Als je op deze manier, door vallen en weer opstaan, een vraagstuk hebt opgelost, gooi dan jouw uitwerking weg en probeer het nog eens helemaal zelf. Als dat lukt heb je echt iets geleerd!
Een voordeel van deze aanpak is ook dat, als je iets uit de uitwerking niet begrijpt, je je docent(e) of mede-student(e) precies kan 'aanwijzen' wat je niet snapt. Je kunt daarna waarschijnlijk weer zelf verder.

De voorbeelden uit het leerboek laten je zien hoe de aanpak van een vraagstuk, de oplossingsroute en de uitwerkingen eruitzien. Bekijk die voorbeelden dus goed en ga bij elke stap na of je begrijpt waarom juist die stap gezet wordt. In het volgende schema staan de aanwijzingen voor het oplossen van vraagstukken nog eens in het kort bij elkaar.
Pak dit schema er overigens alleen bij als je een vraagstuk of berekening niet direct kunt oplossen. Als je door hebt hoe een vraagstuk moet worden aangepakt, ga dan gewoon je eigen weg.

Analyse (zelf doen)	**Oplossingsroute** (zelf doen)	**Uitwerking** (uitwerkingenboek, ter controle)	**Terugblik** (zelf doen)
• Bekijk goed wat er *gevraagd* wordt. • Onderzoek daarna grondig wat er *gegeven* is. • Welke formules en definities kun je gebruiken? • Heb je al eerder zoiets berekend en opgelost? • Heb je in de voorbeelden iets soortgelijks gezien? • Bedenk wat het antwoord ongeveer moet zijn (schatting, welk soort formule wordt gevraagd, enzovoort).	• Hoe kun je vanuit het gevraagde terug redeneren naar de gegevens? • Welke behandelde begrippen, definities en formules leggen verband tussen het gevraagde en de gegevens? • Waar wijkt dit vraagstuk af van de voorbeelden in het boek? Wat is er anders, waar moet je speciaal op letten? • Kom je er nu nog niet uit, kijk dan in het uitwerkingenboek.	• Als het verband tussen het gevraagde en de gegevens (bijna) duidelijk is, probeer dan een uitwerking op te schrijven • Loop je toch vast, omdat een schakeltje ontbreekt of omdat je rekenfouten hebt gemaakt, kijk dan nog even in het uitwerkingenboek. Ga daarna weer zelfstandig door.	• Bekijk jouw oplossing kritisch: - Klopt hij met de verwachtingen uit de analyse? - Klopt hij met de uitwerking in het uitwerkingenboek? - Waar ben je vastgelopen? - Waarom ben je vastgelopen? • Maak het vraagstuk nog een keer helemaal zelf. • Maak nog een vraagstuk van hetzelfde type en leg ergens vast dat je – voor het tentamen – nog een van dit type moet gaan maken.

Nog een tip:
De meest gebruikte computeralgebrapakketten in het hbo zijn *Derive* en *Maple*. Het pakket *Mathematica* wordt in veel mindere mate gebruikt. De uitwerkingen van de computeralgebravraagstukken in dit boek zijn óf in *Derive* óf in *Maple* gegeven, en slechts een enkele keer in *Mathematica*. Als de uitwerking niet gegeven is in het pakket dat jij gebruikt, dan nog kun je veel aan die uitwerking hebben. Om te beginnen is het antwoord gegeven. Ook zal de oplossingsroute in jouw pakket niet veel anders zijn. De gebruikte syntax zal slechts hier en daar wat afwijken.
De benodigde syntax is altijd terug te vinden via de Help-functie van je pakket.

Veel succes met je (wiskunde)studie!

Inhoud

Lineaire algebra

Veel wat van tevoren moeilijk leek,
blijkt achteraf verrassend eenvoudig.

1

Leereenheid 1.1

Vectoralgebra

Praktijksituatie

Opdracht 1 Langs de positieve X-as: $S_2 \cos 45°$, langs de negatieve X-as: $S_1 \sin 30°$.
Langs de positieve Y-as: $S_1 \cos 30°$, langs de negatieve Y-as: $S_2 \sin 45°$.

Opdracht 2 horizontaal evenwicht: $-\frac{1}{2}S_1 + \frac{1}{2}S_2\sqrt{2} = 0$
verticaal evenwicht: $\frac{1}{2}S_1\sqrt{3} - \frac{1}{2}S_2\sqrt{2} = 0$

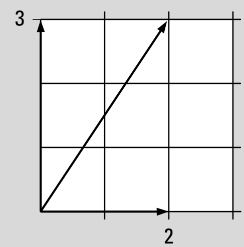
Opdracht 3 Uit $-\frac{1}{2}S_1 + \frac{1}{2}S_2\sqrt{2} = 0$ volgt $S_1 = S_2\sqrt{2}$. Ingevuld in de tweede vergelijking geeft dit $\frac{1}{2}S_2\sqrt{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}S_2\sqrt{2} = 1\,000$, dus:

$$S_2 = \frac{2\,000}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} \approx 1\,931{,}9 \text{ N en } S_1 = \frac{2\,000\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} \approx 2\,732{,}1 \text{ N}$$

1.1.1 Introductie van het vectorbegrip

Opdracht **4** In figuur 1.1 zie je hoe beide snelheden waarmee de boot zich verplaatst kunnen worden samengesteld tot de werkelijke snelheid. De grootte van deze snelheid is te berekenen met behulp van de stelling van Pythagoras en is gelijk aan $\sqrt{13}$.

Figuur 1.1



Opdracht **5** Snelheid = (2,0) + (0,3) = (2,3).

Opdracht **6** De afgelegde weg naar rechts is $\frac{200}{3}$ m. De te varen afstand in de richting van de verplaatsing van de boot is: $\sqrt{100^2 + \left(\frac{200}{3}\right)^2} = 120{,}185$.

Met een snelheid van $\sqrt{13}$ m/s doet Piet hier $33\frac{1}{3}$ seconde over.

Opdracht **7** Omdat $\angle F_2AF_1 = \gamma$ geldt: $\angle AF_1R = \pi - \gamma$

Volgens de cosinusregel geldt: $R^2 = F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2 \cos(\pi - \gamma)$

Omdat $\cos(\pi - \gamma) = \cos(\gamma)$ volgt hieruit:

$R^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos(\gamma)$ en dus:

$\mathrm{R} = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos(\gamma)}$

Opdracht **8** $\underline{a} + \underline{c} = (1,9,0)$
$\underline{a} - \underline{b} = (-4,3,-2)$
$2\underline{a} - 4\underline{c} = (14,-6,6)$
$\underline{a} + 2\underline{b} - \underline{c} = (19,5,8)$

Vraagstuk **1.1 a** $\underline{a} + 1\frac{1}{2}\underline{b} - 4\underline{c} = (1,4,0) + (3,0,-1\frac{1}{2}) - (4,4,24) = (0,0,-25\frac{1}{2})$

b $3(\underline{a} - 2\underline{b}) + 2\underline{c} = 3((1,4,0) - (4,0,-2)) + (2,2,12)$

$= (-9,12,6) + (2,2,12) = (-7,14,18)$

Vraagstuk **1.2 a** $2\underline{x} = (200,175,-10)$, zodat $\underline{x} = (100,87\frac{1}{2},-5)$

b $-\underline{y} = \underline{a} + \underline{b} + \underline{c} + \underline{d} = (200,175,-10)$, zodat $\underline{y} = (-200,-175,10)$

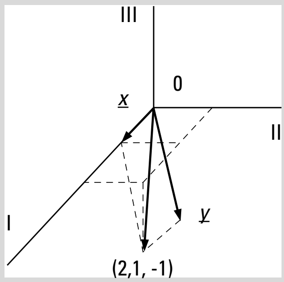
c $-\underline{y} = \underline{a} - \underline{b} + \underline{c} - \underline{d} = (280,215,150)$, zodat $\underline{y} = (-280,-215,-150)$

Vraagstuk **1.3** $0\underline{a} = (0a_1\,,\, 0a_2\,,\, 0a_3) = (0,0,0) = \underline{o}$

Vraagstuk **1.4** $(1,0,0) + (y_1\ , y_2\ , y_3) = (2,1,-1)$, dus:

$$\begin{cases} 1 + y_1 = 2 \\ 0 + y_2 = 1 \\ 0 + y_3 = -1 \end{cases}, \text{ dus } \begin{cases} y_1 = 1 \\ y_2 = 1 \\ y_2 = -1 \end{cases}, \text{ ofwel } \underline{y} = (1,1,-1), \text{ zie ook fig. 1.2.}$$

Figuur 1.2



1.1.2 Eenvoudige bewerkingen met vectoren

Opdracht **9**

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 5 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 7 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 \cdot \underline{e}_1 - 5 \cdot \underline{e}_2 + 7 \cdot \underline{e}_3 + 2 \cdot \underline{e}_4$$

$$\underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \underline{e}_1 + 1 \cdot \underline{e}_2 - 1 \cdot \underline{e}_3 - 1 \cdot \underline{e}_4 + 1 \cdot \underline{e}_5 \text{ en } \underline{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \underline{e}_1 - 1 \cdot \underline{e}_6$$

Opdracht **10** $(\underline{a} \cdot \underline{b}) = 21 + 10 + 3 = 34$

Opdracht **11** In de definitie wordt gesproken over het inwendig product van twee vectoren. Het inwendig product van drie vectoren is niet gedefinieerd.

Opdracht **12** Bijvoorbeeld $\underline{a} + \underline{b} + \underline{c}$ of $(\underline{a} + \underline{c} \cdot \underline{a} - 3\underline{b})$

Opdracht **13**

1. $(\underline{a} \cdot \underline{b}) = a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n$ is element van $\mathbb{R}$.
2. $(\underline{a} \cdot \underline{b}) = a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n = b_1a_1 + b_2a_2 + \ldots + b_na_n = (\underline{b} \cdot \underline{a})$
3. Met $\underline{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ krijgen we:

$$\begin{aligned} ((\underline{a} + \underline{b}) \cdot \underline{c}) &= (a_1 + b_1)c_1 + (a_2 + b_2)c_2 + \ldots + (a_n + b_n)c_n && \text{(haakjes uitwerken)} \\ &= a_1c_1 + b_1c_1 + a_2c_2 + b_2c_2 + \ldots + a_nc_n + b_nc_n && \text{(herschikken)} \\ &= a_1c_1 + a_2c_2 + \ldots + a_nc_n + b_1c_1 + b_2c_2 + \ldots + b_nc_n \\ &= (\underline{a} \cdot \underline{c}) + (\underline{b} \cdot \underline{c}) \end{aligned}$$

4. $$\begin{aligned} (\alpha\, \underline{a} \cdot \underline{b}) &= \alpha\, a_1b_1 + \alpha\, a_2b_2 + \ldots + \alpha\, a_nb_n \quad (\alpha \text{ buiten haakjes halen}) \\ &= \alpha(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n) = \alpha(\underline{a} \cdot \underline{b}) \end{aligned}$$

5 $(\underline{a} \cdot \underline{a}) = {a_1}^2 + {a_2}^2 + \ldots + {a_n}^2 > 0$, omdat minstens 1 van de componenten van $\underline{a}$ ongelijk nul is en omdat kwadraten altijd groter dan nul zijn.

Opdracht **14** Geen uitwerking.

Vraagstuk **1.5** De bewering is niet juist, $\sum_{k=1}^{4} (-1)^k \underline{e}_k = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Vraagstuk **1.6**

$$\begin{aligned} \underline{a} &= (-1)^1 \underline{e}_1 + (-1)^2 \underline{e}_2 + (-1)^3 \underline{e}_3 + \ldots + (-1)^n \underline{e}_n \\ &= -\underline{e}_1 + \underline{e}_2 - \underline{e}_3 + \ldots \pm \underline{e}_n \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix} + \ldots + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \pm 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \pm 1 \end{pmatrix}$$

Vraagstuk **1.7**

$$\begin{aligned} \underline{a} &= (2)^1 \underline{e}_1 + (2)^2 \underline{e}_2 + (2)^3 \underline{e}_3 + \ldots + (2)^n \underline{e}_n \\ &= 2\underline{e}_1 + 4\underline{e}_2 + 8\underline{e}_3 + \ldots + 2^n \underline{e}_n \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix} + \ldots + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 2^n \end{pmatrix}$$

Vraagstuk **1.8** Nee, $(\underline{b} \cdot \underline{c})$ is een scalair en je kunt van een vector en een scalair geen inwendig product berekenen.

Vraagstuk **1.9 a** $(\underline{a} \cdot \underline{e}_k) = a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0 + \ldots + a_k \cdot 1 + \ldots + a_n \cdot 0 = a_k$

b $\sum_{k=1}^{n} (\underline{a} \cdot \underline{e}_k)\underline{e}_k = \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot \underline{e}_k = a_1 \cdot \underline{e}_1 + a_2 \cdot \underline{e}_2 + \ldots + a_n \cdot \underline{e}_n = \underline{a}$

Vraagstuk **1.10** Bijvoorbeeld $\underline{a} = (0,0,0,1,1)$ en $\underline{b} = (2,0,3,1,-1)$

Vraagstuk **1.11** Twee vectoren liggen in elkaars verlengde als de ene vector α keer zo groot is als de ander, dus als: $(a,2) = \alpha(4,a) \quad (\alpha \neq 0)$

Dus $\begin{cases} a = 4\alpha \\ 2 = \alpha a \end{cases}$

Uit de eerste vergelijking volgt $\alpha = \dfrac{a}{4} \cdot$ Gesubstitueerd in de tweede vergelijking geeft dit: $2 = \dfrac{a}{4} \cdot a \Leftrightarrow a^2 = 8 \Leftrightarrow a = \pm 2\sqrt{2}$

Vraagstuk **1.12 a** $(\underline{a} \cdot \underline{b}) = 2 + 0 + 0 = 2$
$(\underline{b} \cdot \underline{c}) = 2 + 0 - 6 = -4$
$3(\underline{a} \cdot \underline{b}) - 5(\underline{b} \cdot \underline{c}) = 3 \cdot 2 - 5 \cdot -4 = 26$

b $\underline{a} + \underline{b} = (3,4,-1)$ en $\underline{a} - \underline{c} = (0,3,-6)$, dus
$((\underline{a} + \underline{b}) \cdot (\underline{a} - \underline{c})) = 0 + 12 + 6 = 18$

Vraagstuk **1.13** Als $i \neq j$ is $(\underline{e}_i \cdot \underline{e}_j) = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + \ldots + 1 \cdot 0 + \ldots + 0 \cdot 1 + \ldots + 0 \cdot 0 = 0$
Als $i = j$ is $(\underline{e}_i \cdot \underline{e}_j) = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + \ldots + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + \ldots + 0 \cdot 0 = 1$

Vraagstuk **1.14 a** $\underline{F} = (1,-1)$ en $\underline{s}_1 = (1,1)$. Nemen we $\underline{s}_2 = (2,-1)$ en $\underline{s}_3 = (-1,-2)$, dan berekenen we de arbeid W als volgt:
$W = (\underline{F} \cdot \underline{s}_1) + (\underline{F} \cdot \underline{s}_2) + (\underline{F} \cdot \underline{s}_3) = (1-1) + (2+1) + (-1+2)$
$= 0 + 3 + 1 = 4$

b $\underline{F} = (1,-1)$ en $\underline{s} = (2,-2)$, dus $W = (\underline{F} \cdot \underline{s}) = 2 + 2 = 4$

1.1.3 Lengte van een vector

Opdracht **15** $\|\underline{v}\| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x \cdot x + y \cdot y} = \sqrt{(\underline{v} \cdot \underline{v})}$

Vraagstuk **1.15** $\|\underline{a}\| = \sqrt{1^2 + 4^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{25} = 5$
$\|\underline{b}\| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$

Vraagstuk **1.16** De resultante van de vectoren $\underline{a} = (2,-1)$ en $\underline{b} = (1,3)$ is $(3,2)$. De lengte hiervan is $\sqrt{13}$.
$\underline{c} = 2\underline{a} - 3\underline{b} = (1,-11)$. De lengte hiervan is $\sqrt{122}$.

Vraagstuk **1.17** $\|(1,x) + (3,-2)\| = \|(4,x-2\| = \sqrt{16 + (x-2)^2} = \sqrt{x^2 - 4x + 20} = 5$,
dus $x^2 - 4x + 20 = 25$. Hieruit volgt $x^2 - 4x - 5 = 0$
$\Leftrightarrow (x-5)(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = 5$ of $x = -1$

1.1.4 Hoek tussen vectoren

Opdracht **16** W is positief als $\cos\varphi > 0$ en negatief als $\cos\varphi < 0$, dus W is positief als $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$ en negatief als $\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{3\pi}{2}$. Er wordt door F geen arbeid verricht als $\cos\varphi = 0$, dus als $\varphi = \frac{\pi}{2}$ of als $\varphi = -\frac{\pi}{2}$. Met andere woorden: als de kracht F loodrecht staat op de af te leggen weg, wordt er geen arbeid verricht.

Opdracht **17** $\|\underline{a}\| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}$
$\|\underline{b}\| = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}$
$\cos\varphi = \dfrac{((-1,2) \cdot (4,2))}{\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{5}} = \dfrac{0}{10} = 0$

Opdracht **18** **a** Twee vectoren staan loodrecht op elkaar als hun inwendig product 0 is.
$((-1,1) \cdot (3,3)) = 0$, dus deze twee vectoren staan loodrecht op elkaar.

b $((3,-2a) \cdot (1,a)) = 0 \Leftrightarrow 3 - 2a^2 = 0 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2}\sqrt{6}$ of $a = \frac{1}{2}\sqrt{6}$

Opdracht **19** $\|\underline{p}\| = \|\underline{b}\| \cos\varphi = \|\underline{b}\| \dfrac{(\underline{a} \cdot \underline{b})}{\|\underline{a}\| \cdot \|\underline{b}\|} = \dfrac{(\underline{a} \cdot \underline{b})}{\|\underline{a}\|}$

Vraagstuk **1.18 a** $\cos\varphi = \dfrac{((1,4,2) \cdot (-1,1,1))}{\sqrt{1+16+4} \cdot \sqrt{1+1+1}} = \dfrac{-1+4+2}{\sqrt{21} \cdot \sqrt{3}} = \dfrac{5}{\sqrt{63}}$

b De projectie van $\underline{a}$ op $\underline{b}$:

$$\underline{p} = \frac{(\underline{a} \cdot \underline{b})}{\|\underline{b}\|} \cdot \frac{\underline{b}}{\|\underline{b}\|} = \frac{-1+4+2}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} \cdot (-1,1,1) = \left(-\tfrac{5}{3}, \tfrac{5}{3}, \tfrac{5}{3}\right)$$

De projectie van $\underline{b}$ op $\underline{a}$:

$$\underline{p} = \frac{(\underline{a} \cdot \underline{b})}{\|\underline{a}\|} \cdot \frac{\underline{a}}{\|\underline{a}\|} = \frac{-1+4+2}{\sqrt{21}\cdot\sqrt{21}} \cdot (1,4,2) = \left(\tfrac{5}{21}, \tfrac{20}{21}, \tfrac{10}{21}\right)$$

Vraagstuk **1.19 a** $((1,0,1) \cdot (-2,1,2)) = 0$, dus loodrechte stand.

b $\begin{cases} ((1,2,3) \cdot (9,0,-3)) = 0 \\ ((1,2,3) \cdot (1,-5,3)) = 0 \\ ((9,0,-3) \cdot (1,-5,3)) = 0 \end{cases}$, dus de vectoren staan twee aan twee loodrecht op elkaar.

c $((0,\alpha,\alpha) \cdot (\beta,0,0)) = 0$, dus loodrechte stand voor willekeurige α en β.

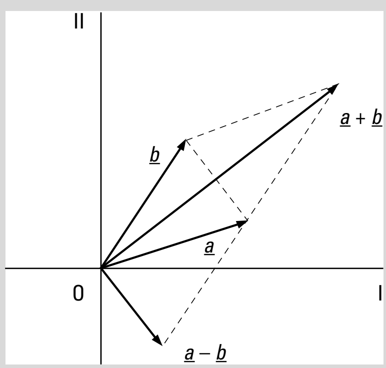
d $\begin{cases} ((0,0,1) \cdot (1,1,0)) = 0 \\ ((0,0,1) \cdot (0,1,1)) = 1 \\ ((1,1,0) \cdot (0,1,1)) = 1 \end{cases}$, dus deze vectoren staan niet twee aan twee loodrecht op elkaar.

Vraagstuk **1.20 a** $(\underline{a} + \underline{b}) \cdot (\underline{a} - \underline{b}) = (\underline{a} \cdot \underline{a}) + (\underline{b} \cdot \underline{a}) - (\underline{a} \cdot \underline{b}) - (\underline{b} \cdot \underline{b})$
$= (\underline{a} \cdot \underline{a}) - (\underline{b} \cdot \underline{b}) = 0,$

dus $\underline{a} + \underline{b}$ en $\underline{a} - \underline{b}$ staan loodrecht op elkaar.

b

Figuur 1.3



Vraagstuk **1.21** $\begin{matrix} ((\alpha,\beta,\gamma) \cdot (2,2,3)) = 0 \\ ((\alpha,\beta,\gamma) \cdot (2,0,1)) = 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} 2\alpha + 2\beta + 3\gamma = 0 \\ 2\alpha + \gamma = 0 \end{cases}$

Dit stelsel vergelijkingen heeft oneindig veel oplossingen, omdat er meer onbekenden dan vergelijkingen zijn. Een combinatie die voldoet is bijvoorbeeld: $\alpha = 1$, $\beta = 2$ en $\gamma = -2$.

Vraagstuk **1.22** $\begin{cases} ((0,0,2) \cdot (2,1,0)) = 0 \\ ((0,0,2) \cdot (-2,4,0)) = 0 \\ ((2,1,0) \cdot (-2,4,0)) = 0 \end{cases}$, dus de vectoren staan twee aan twee loodrecht op elkaar.

De bewering is juist.

Vraagstuk **1.23** $((-1,p,3) \cdot (p,-p,2)) = 0 \Leftrightarrow -p - p^2 + 6 = 0 \Leftrightarrow (p+3)(p-2) = 0$
$\Leftrightarrow p = -3$ of $p = 2$. De bewering is niet juist.

1.1.5 Uitwendig product

Opdracht **20** $\underline{e}_1 * \underline{e}_2$: het parallellogram dat door $\underline{e}_1$ en $\underline{e}_2$ wordt opgespannen, heeft een oppervlakte gelijk aan 1. De vector die loodrecht staat op $\underline{e}_1$ en $\underline{e}_2$, een lengte 1 heeft en een richting zoals in fig. 1.17 van het leerboek is $\underline{e}_3$.

$\underline{e}_2 * \underline{e}_3$: het parallellogram dat door $\underline{e}_2$ en $\underline{e}_3$ wordt opgespannen, heeft een oppervlakte gelijk aan 1. De vector die loodrecht staat op $\underline{e}_2$ en $\underline{e}_3$, een lengte 1 heeft en een richting zoals in fig. 1.17 van het leerboek is $\underline{e}_1$.

$\underline{e}_3 * \underline{e}_1$: het parallellogram dat door $\underline{e}_3$ en $\underline{e}_1$ wordt opgespannen, heeft een oppervlakte gelijk aan 1. De vector die loodrecht staat op $\underline{e}_3$ en $\underline{e}_1$, een lengte 1 heeft en een richting zoals in fig. 1.17 van het leerboek is $\underline{e}_2$.

Opdracht **21** $\underline{a} * \underline{b}$ en $\underline{b} * \underline{a}$ hebben dezelfde grootte, omdat het gaat om de oppervlakte van hetzelfde parallellogram. Vanwege de kurkentrekkerregel hebben ze echter een tegengestelde richting, dus: $\underline{a} * \underline{b} = -\underline{b} * \underline{a}$

$\underline{a} * \underline{a}$ is een vector met grootte 0. Deze vector noteren we met $\underline{o}$.

Opdracht **22** $\underline{a} * \underline{b} = (3 \cdot 4 - (-2) \cdot 2\ ,\ (-2) \cdot 0 - 1 \cdot 4\ ,\ 1 \cdot 2 - 3 \cdot 0) = (16,-4,2)$

Opdracht **23** De oppervlakte van het parallellogram opgespannen door $\underline{F}'$ en $\underline{OA}$ is gelijk aan de oppervlakte opgespannen door $\underline{F}'$ en $\underline{d}$. De vectoren $\underline{OA} * \underline{F}'$ en $\underline{d} * \underline{F}'$ zijn gelijk gericht. Het moment $\underline{M}$ kan dus zowel door $\underline{OA} * \underline{F}'$ als door $\underline{d} * \underline{F}'$ worden voorgesteld, want $\underline{OA} * \underline{F}'$ en $\underline{d} * \underline{F}'$ hebben dezelfde grootte en richting.

Opdracht **24** Gebruik eigenschap 4 van het uitwendig product.

Vraagstuk **1.24 a** Het uitwendig product van $(3,3,-1)$ en $(-1,-2,4)$ is $(10,-11,-3)$. De vectoren $\alpha(10,-11,-3)$ met α in $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ staan dus loodrecht op $(3,3,-1)$ en $(-1,-2,4)$.

b Het uitwendig product van $(2,2,3)$ en $(2,0,1)$ is $(2,4,-4)$. De vectoren $\alpha(2,4,-4)$ met α in $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ staan dus loodrecht op $(2,2,3)$ en $(2,0,1)$.

Vraagstuk **1.25** Een vector $\perp(1,2,3)$ en $\perp(0,1,2)$ kan worden voorgesteld door:

$\alpha((1,2,3) * (0,1,2)) = \alpha(1,-2,1)$

De gevraagde vector moet lengte 1 hebben, dus:

$$\sqrt{\alpha^2 + (-2\alpha)^2 + \alpha^2} = \sqrt{6\alpha^2} = \pm\,\alpha\sqrt{6} = 1$$

Hieruit volgt voor α: $\alpha = \pm\frac{1}{6}\sqrt{6}$. De gevraagde vectoren zijn dus:

$$\left(\tfrac{1}{6}\sqrt{6}, -\tfrac{2}{6}\sqrt{6}, \tfrac{1}{6}\sqrt{6}\right) \text{ en } \left(-\tfrac{1}{6}\sqrt{6}, \tfrac{2}{6}\sqrt{6}, -\tfrac{1}{6}\sqrt{6}\right)$$

Vraagstuk **1.26** Volgens eigenschap 6 van het uitwendig product geldt:

$$\begin{aligned}&\underline{a} * (\underline{b} * \underline{c}) + \underline{b} * (\underline{c} * \underline{a}) + \underline{c} * (\underline{a} * \underline{b})\\ &\quad = (\underline{a} \cdot \underline{c})\underline{b} - (\underline{a} \cdot \underline{b})\underline{c} + (\underline{b} \cdot \underline{a})\underline{c} - (\underline{b} \cdot \underline{c})\underline{a} + (\underline{c} \cdot \underline{b})\underline{a} - (\underline{c} \cdot \underline{a})\underline{b}\end{aligned}$$

Met eigenschap 2 van het inwendig product volgt dan:

$\underline{a} * (\underline{b} * \underline{c}) + \underline{b} * (\underline{c} * \underline{a}) + \underline{c} * (\underline{a} * \underline{b}) = \underline{o}$

1.1.6 Afhankelijkheid en onafhankelijkheid van vectoren

Vraagstuk

1.27 a Uit $\alpha_1(2,7,-1) + \alpha_2(3,2,0) = \underline{o}$ volgt:

$$\begin{cases} 2\alpha_1 + 3\alpha_2 = 0 \\ 7\alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \\ -\alpha_1 \qquad\quad = 0 \end{cases}$$

Hieruit volgt $\alpha_1 = 0$ en $\alpha_2 = 0$ als enige oplossing. Het stelsel is dus onafhankelijk.

b Uit $\alpha_1(0,1,7) + \alpha_2(0,2,1) + \alpha_3(0,3,1) = \underline{o}$ volgt:

$$\begin{cases} 0\alpha_1 + 0\alpha_2 + 0\alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 \\ 7\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

Behalve $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$ en $\alpha_3 = 0$ voldoet bijvoorbeeld ook $\alpha_1 = -1$, $\alpha_2 = 20$ en $\alpha_3 = -13$. Het stelsel is dus afhankelijk.

c Uit $\alpha_1\underline{e}_1 + \alpha_2\underline{e}_2 + \alpha_3\underline{e}_3 + \alpha_4(\underline{e}_1 - \underline{e}_2 + \underline{e}_4) = \underline{o}$ volgt:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \qquad\qquad \alpha_4 = 0 \\ \qquad \alpha_2 \qquad - \alpha_4 = 0 \\ \qquad\qquad \alpha_3 \qquad = 0 \\ \qquad\qquad\qquad \alpha_4 = 0 \end{cases}$$

Hieraan voldoen uitsluitend $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 0$ en $\alpha_4 = 0$, dus het stelsel is onafhankelijk.

d {(1,1,2,2) , (1,0,3,2) , (0,0,2,0) , (6,0,4,0)} is een onafhankelijk stelsel.

e {(3,1,2,3,5) , (1,6,2,0,3) , (4,0,5,0,7)} is een onafhankelijk stelsel.

Vraagstuk

1.28 De vectoren $(1,\beta,0)$, $(0,1,\alpha+\beta)$ en $(\alpha,0,0)$ vormen een onafhankelijk stelsel als:
$\alpha_1(1,\beta,0) + \alpha_2(0,1,\alpha+\beta) + \alpha_3(\alpha,0,0) = \underline{o}$ alleen voor $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$ en $\alpha_3 = 0$. Ofwel:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \qquad\qquad \alpha_3\alpha = 0 \\ \alpha_1\beta + \qquad \alpha_2 \qquad = 0 \\ \qquad \alpha_2(\alpha+\beta) \qquad = 0 \end{cases} \quad \text{alleen voor } \alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = 0 \text{ en } \alpha_3 = 0$$

Is het stelsel onafhankelijk dan moet zeker $(\alpha + \beta) \neq 0$ (dan is immers $\alpha_2 = 0$; volgt uit derde vergelijking). En moet $\beta \neq 0$ (dan zal zeker α_1 nul zijn, dit volgt uit de tweede vergelijking).
Uit de eerste vergelijking volgt dan $\alpha_3\alpha = 0$. Wil α_3 gelijk nul zijn, dan moet α ongelijk zijn aan nul.
Samengevat: het stelsel is onafhankelijk als $\alpha + \beta \neq 0$ en $\alpha \neq 0$ en $\beta \neq 0$.

Vraagstuk

1.29 Uit $\alpha_1(1,-1,1) + \alpha_2(3,-4,1) + \alpha_3(0,1,1) = \underline{o}$ volgt:

$$\begin{cases} \alpha_1 + 3\alpha_2 \qquad = 0 \\ -\alpha_1 - 4\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

Hieruit volgt uitsluitend $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$ en $\alpha_3 = 0$. Dus het is een onafhankelijk stelsel, zodat de bewering **niet juist** is.

1.1.7 Toepassingen met computeralgebra

Vraagstuk **1.30 a** De coördinaten van C zijn: $\left(4\ ,\ 2\frac{1}{2}\ ,\ 2\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$

b $\|\underline{S}\| = 20$. Met behulp van de coördinaten van C schrijven we voor de spankracht:

$$\underline{S} = \frac{20}{\sqrt{4^2+\left(2\frac{1}{2}\right)^2+\left(2\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2}}\begin{pmatrix}-4\\-2\frac{1}{2}\\-2\frac{1}{2}\sqrt{3}\end{pmatrix}$$

c Volgens de formule van het moment geldt: $\underline{M} = \underline{d} * \underline{S}$ (zie fig. 1.19 van het leerboek). Voor $\underline{d}$ geldt: $\underline{d} = (-4,0,0)$, zodat we (met behulp van een computeralgebrapakket) voor $\underline{M}$ vinden:

In *Maple*:

```
> with(linalg):
> c: =vector([4,2.5,2.5*sqrt(3)]);
> S: =20*c/norm(c,2);
> d: =vector([-4,0,0]);
> M: =crossprod(d,S);
```

Het resultaat is $[0,\ 31.23475238\sqrt{3},\ -31.23475238]$

In *Derive*:

```
#1  c:=[4,2.5,2.5*sqrt(3)]
#2  S:=20*c/ABS(c)
#3  d:=[-4,0,0]
#4  CROSS(d,S)
```

Het resultaat is: $[0, \dfrac{200\cdot\sqrt{123}}{41}, -\dfrac{200\cdot\sqrt{41}}{41}]$.

Toets

1 a $2\underline{a} + 3\underline{b} - \underline{c} = (-2,6,-4) + (6,-9,15) - (1,2,-3) = (3,-5,14)$

b $(\underline{a}\cdot\underline{b}) = -2 - 9 - 10 = -21$
$(\underline{b}\cdot\underline{c}) = 2 - 6 - 15 = -19$

c $\|\underline{a}\| = \sqrt{14}$

$\|\underline{b} - \underline{c}\| = \|(1, -5,8)\| = 3\sqrt{10}$

d $\underline{a} * \underline{c} = (-5,-5,-5)$
$\underline{b} * \underline{c} = (-1,11,7)$

e In *Maple*:

```
> with(linalg):
> a := vector([-1, 3, -2]):
> b := vector([2, -3, 5]):
> c := vector([1, 2, -3]):
> evalm(2*a+3*b-c);
  [3, -5, 14]
> dotprod(a,b);
  -21
```

```
> dotprod(b,c);
  -19
> norm(a, 2);
  √14
> norm(b-c, 2);
  3 √10
> crossprod(a,c);
  [-5, -5, -5]
> crossprod(b,c);
  [-1, 11, 7]
```

2 a Stel $\underline{x} = (x_1\,, x_2)$. Er moet dan gelden:

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = 90 \\ \dfrac{3x_1 + 4x_2}{5\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} = \dfrac{5x_2}{5\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = 90 \\ 3x_1 + 4x_2 = 5x_2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = 90 \\ 3x_1 \quad = x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \quad 10x_1^2 = 90 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} x_1 = 3, \quad x_2 = 9 \\ x_1 = -3, \; x_2 = -9 \end{array}$$

b De projectie van $\underline{a}$ op $\underline{b}$: $\frac{20}{25}\begin{pmatrix}0\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}$

De projectie van $\underline{b}$ op $\underline{a}$: $\frac{20}{25}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{12}{5}\\\frac{16}{5}\end{pmatrix}$

3 $\cos\varphi = \dfrac{-2+2+1}{\sqrt{6}\,\sqrt{6}} = \frac{1}{6}$

4 a Uit $\alpha_1(2,0,1) + \alpha_2(0,4,-2) + \alpha_3(0,-2,1) = \underline{o}$ volgt:

$$\begin{cases} 2\alpha_1 \qquad\qquad\qquad = 0 \\ \qquad 4\alpha_2 - 2\alpha_3 = 0 \\ \quad -2\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

Behalve $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$ en $\alpha_3 = 0$ voldoen bijvoorbeeld ook $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 1$ en $\alpha_3 = 2$. Het stelsel is dus afhankelijk; de gestelde bewering is **juist**.

b Uit $\alpha_1(2,-4,3) + \alpha_2(0,4,-2) + \alpha_3(0,-2,1) = \underline{o}$ volgt:

$$\begin{cases} 2\alpha_1 \qquad\qquad\qquad = 0 \\ -4\alpha_1 + 4\alpha_2 - 2\alpha_3 = 0 \\ 3\alpha_1 - 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

Behalve $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$ en $\alpha_3 = 0$ voldoen bijvoorbeeld ook $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 1$ en $\alpha_3 = 2$. Het stelsel is dus afhankelijk; de gestelde bewering is juist.

Leereenheid 1.2

Matrixrekening

Inleiding

Opdracht **1** Geen uitwerking.

Praktijksituatie

Opdracht **2 a** De totale voorraad spijkerbroeken van merk *'B'* is $8 + 4 + 1 + 3 = 16$.
b De totale voorraad spijkerbroeken in maat 52 is $6 + 3 + 1 + 6 + 4 = 20$.
c De totale voorraad spijkerbroeken is de som van alle matrixelementen (= 72).

3 a De nieuwe voorraad spijkerbroeken van merk *'C'* in maat 48 is $2 + 8 = 10$.
b De nieuwe voorraad spijkerbroeken van merk *'B'* is $(8 + 4 + 1 + 3) + (0 + 2 + 8 + 6) = 32$.
c De nieuwe voorraad spijkerbroeken in maat 52 is $(6 + 3 + 1 + 6 + 4) + (6 + 6 + 7 + 2 + 5) = 46$.
d De nieuwe voorraad spijkerbroeken is $72 + 106 = 178$.

1.2.1 Introductie van het begrip matrix

Opdracht **4** $a_{31} = 8$ en $a_{12} = 9$

Opdracht **5** $A^T = \begin{pmatrix} 7 & 9 \\ 9 & 3 \\ 8 & -5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B^T = \begin{pmatrix} 7 & 9 & 8 & 1 \\ 9 & 3 & -5 & 0 \\ 8 & -5 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

Vraagstuk **1.31** Voor $\begin{cases} a = a^2 \\ 0 = \quad c \\ b = -b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \text{ of } a = 1 \\ c = 0 \\ b = 0 \end{cases}$

Vraagstuk **1.32** (δ_{ij}) met i,j in $\{1,\ldots,p\}$ is een $p \times p$-matrix met enen op de hoofddiagonaal (want daar zijn i en j gelijk) en voor de rest nullen (want daar zijn i en j niet gelijk aan elkaar). Daarom is $(\delta_{ij}) = I$.

Vraagstuk **1.33** Ja, deze bewering is juist.

Vraagstuk **1.34** (a_{ij}) is een matrix en a_{ij} is een element van een matrix.

1.2.2 Optellen en scalair vermenigvuldigen

Opdracht **6** $3A - 2B = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 6 & 12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 & 14 \\ 12 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -5 \\ -6 & -4 \end{pmatrix}$

Vraagstuk **1.35** Neem bijvoorbeeld:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 5 \\ -4 & 1 & 2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} \text{ en } C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

dan geldt:

$$(A + B) + C = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & 8 \\ 0 & 2 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 4 & -3 \\ 1 & 7 & 9 \\ -1 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

$$A + (B + C) = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 5 \\ -4 & 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 4 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 4 & -3 \\ 1 & 7 & 9 \\ -1 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

Hier staat de associatieve wet voor de optelling voor matrices. Dit is direct het gevolg van het feit dat de optelling voor getallen associatief is.

Vraagstuk **1.36** $(A + B)^T = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{21} + b_{21} \\ a_{12} + b_{12} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix}$

$A^T + B^T$ geeft precies hetzelfde resultaat.

1.2.3 Matrixvermenigvuldiging

Opdracht **7** $\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\0 & 3 & -2\\1 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\1 & 0 & 0\\0 & -3 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -1 & -1\\3 & 6 & -4\\2 & 2 & -1\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\1 & 0 & 0\\0 & -3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\0 & 3 & -2\\1 & 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -1 & 1\\1 & 1 & 0\\2 & -9 & 4\end{pmatrix}$

Opdracht **8 a** In de eerste kolomvector staan de prijzen per merk, in de tweede kolomvector staan de prijzen per maat.

b In de eerste kolomvector staan de prijzen per maat, in de tweede kolomvector staan de prijzen per merk.

Vraagstuk **1.37 a** $\begin{pmatrix}1 & 2\\0 & 7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\-2 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & -5\\-14 & -21\end{pmatrix}$

b $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 0 & 0\\5 & 6 & 7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & -2 & -3\\-4 & 0 & 0\\5 & 6 & 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 16 & 18\\-4 & -8 & -12\\6 & 32 & 34\end{pmatrix}$

c $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\0 & 1 & 0 & 1\\1 & 0 & 1 & 2\\0 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0\\4 & 1\\-1 & 1\\2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 3\\6 & 4\\5 & 7\\4 & 1\end{pmatrix}$

d $\begin{pmatrix}1 & 2 & 6\\0 & 1 & 8\\-1 & 2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}23\\26\\3\end{pmatrix}$

Vraagstuk **1.38** Alleen van de producten AB in de vraagstukken 1.37 **a** en **b** bestaat ook het product BA:

a $\begin{pmatrix}1 & 1\\-2 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\0 & 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 9\\-2 & -25\end{pmatrix}$

b $\begin{pmatrix}-1 & -2 & -3\\-4 & 0 & 0\\5 & 6 & 7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 0 & 0\\5 & 6 & 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-24 & -20 & -24\\-4 & -8 & -12\\64 & 52 & 64\end{pmatrix}$

Vraagstuk **1.39** $AI = A$ en $IA = A$.

Vraagstuk **1.40** $I\underline{x} = \underline{x}$. De uitdrukking $\underline{x}I$ bestaat alleen als $p = 1$.

Vraagstuk **1.41** $\begin{pmatrix}1 & b & a\\-2 & 0 & 1\\a & b & 1\\0 & 1 & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-1\\2\\4\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}a+b+1=2\\a+1=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=3\\b=-2\end{cases}$

Vraagstuk **1.42** Neem bijvoorbeeld:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \\ -4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ en } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \text{ dan geldt:}$$

$$AB = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -11 \\ 20 & 11 & 34 \\ 4 & 4 & 17 \end{pmatrix}, \ (AB)^T = \begin{pmatrix} -4 & 20 & 4 \\ 0 & 11 & 4 \\ -11 & 34 & 17 \end{pmatrix}$$

$$A^T \cdot B^T = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -4 \\ 1 & 3 & 1 \\ -2 & 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -12 & -4 \\ 0 & 9 & 12 \\ -4 & 16 & 7 \end{pmatrix}$$

$$B^T \cdot A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & -4 \\ 1 & 3 & 1 \\ -2 & 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 20 & 4 \\ 0 & 11 & 4 \\ -11 & 34 & 17 \end{pmatrix}$$

Aan de gekozen getallenvoorbeelden is te zien dat $(AB)^T = B^T \cdot A^T$.
Dit is geen toeval, maar een regel (die we niet bewijzen). Er geldt dus in het algemeen ook $(AB)^T = B^T \cdot A^T$.

Vraagstuk **1.43** $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Vraagstuk **1.44** $A + B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ en $A - B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ en $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$(A + B)(A - B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 - B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Dus $(A + B)(A - B) \neq A^2 - B^2$

1.2.4 De inverse matrix

Vraagstuk **1.45** We volgen de methode van het voorbeeld en gaan dus uit van:

$A^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Trek de tweede kolom af van de derde kolom:

$A^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Trek de derde kolom af van de eerste kolom:

$$A^{-1}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&-1\\-1&0&1\end{pmatrix}$$ Deel de eerste kolom door 2:

$$A^{-1}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0&0\\\frac{1}{2}&1&-1\\-\frac{1}{2}&0&1\end{pmatrix}$$ en zet de kolommen op de goede plaats:

$$A^{-1}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0&0\\\frac{1}{2}&-1&1\\-\frac{1}{2}&1&0\end{pmatrix}$$

Dus de inverse is: $A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0&0\\\frac{1}{2}&-1&1\\-\frac{1}{2}&1&0\end{pmatrix}$

Vraagstuk **1.46 a** O heeft een inverse A als geldt: $O \cdot A = I$, maar $O \cdot A$ is altijd gelijk aan O, dus O heeft geen inverse.

b Voor de eenheidsmatrix geldt: $I \cdot I = I$, dus $I^{-1} = I$.

Vraagstuk **1.47 a** $A^{-1}\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ Trek 2 × de eerste kolom af van de tweede kolom:

$$A^{-1}\begin{pmatrix}1&0\\3&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-2\\0&1\end{pmatrix}$$ Deel de tweede kolom door –2:

$$A^{-1}\begin{pmatrix}1&0\\3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\0&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$ Trek 3 × de tweede kolom af van de eerste kolom:

$$A^{-1}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&1\\\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}, \text{ dus } A^{-1}=\begin{pmatrix}-2&1\\\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

b $A^{-1}\begin{pmatrix}2&0&1\\0&1&1\\2&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ Trek de tweede kolom af van de derde kolom:

$$A^{-1}\begin{pmatrix}2&0&1\\0&1&0\\2&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$$ Deel de eerste kolom door 2:

$$A^{-1}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$$ Trek de derde kolom af van de eerste kolom:

$$A^{-1}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0&0\\1&1&-1\\-1&0&1\end{pmatrix}$$ en zet de kolommen op de juiste plaats:

$$A^{-1}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&\frac{1}{2}\\-1&1&1\\1&0&-1\end{pmatrix}\text{, dus } A^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&\frac{1}{2}\\-1&1&1\\1&0&-1\end{pmatrix}$$

c $A^{-1}=\begin{pmatrix}2&-1&1\\-1&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$

d $A^{-1}=\begin{pmatrix}-40&16&9\\13&-5&-3\\5&-2&-1\end{pmatrix}$

1.2.5 Het oplossen van stelsels lineaire vergelijkingen

Opdracht **9** Het gaat dus om het stelsel $\begin{pmatrix}2&0&0\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, ofwel

$$\begin{cases}2x_1 = 1\\ x_1 + x_3 = 2\\ x_2 + x_3 = 3\end{cases}$$

a We lossen eerst vergelijking 1 op, daarna vergelijking 2 en ten slotte vergelijking 3. Het resultaat is:

$$\begin{cases}x_1 = \frac{1}{2}\\ x_3 = \frac{3}{2}\\ x_2 = \frac{3}{2}\end{cases}$$

b In vraagstuk 1.45 hebben we gevonden: $A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0&0\\\frac{1}{2}&-1&1\\-\frac{1}{2}&1&0\end{pmatrix}$, dus

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0&0\\\frac{1}{2}&-1&1\\-\frac{1}{2}&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}+0+0\\\frac{1}{2}-2+3\\-\frac{1}{2}+2+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{3}{2}\\\frac{3}{2}\end{pmatrix}$$

Opdracht **10** We bepalen de inverse van de coëfficiëntenmatrix $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&2\\1&1&3\end{pmatrix}$

$A^{-1}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&2\\1&1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ Trek de eerste kolom af van de tweede kolom:

$$A^{-1}\begin{pmatrix}1&0&1\\1&0&2\\1&0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

Vanwege de nullen in de tweede kolom kunnen we de matrix niet omzetten in de eenheidsmatrix, zodat A geen inverse heeft: A is singulier.

Vraagstuk **1.48** Volgens de wetten van Kirchhoff geldt voor het elektrisch netwerk uit fig. 1.19:

$$\begin{cases} I_1 = I_2 + I_3 \\ R_1I_1 + R_3I_3 = -E_1 \\ R_2I_2 - R_3I_3 = E_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} R_1I_1 + R_3(I_1 - I_2) = -E_1 \\ R_2I_2 - R_3(I_1 - I_2) = E_2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (R_1 + R_3)\,I_1 - R_3I_2 = -E_1 \\ -R_3I_1 + (R_2 + R_3)\,I_2 = E_2 \end{cases}$$

Dit is in matrixnotatie:

$$\begin{pmatrix} (R_1 + R_3) & -R_3 \\ -R_3 & (R_2 + R_3) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -E_1 \\ E_2 \end{pmatrix}$$

Vraagstuk **1.49 a** We herschrijven het stelsel tot $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_1 + 6x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$,

zodat de matrixnotatie wordt: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 6 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

b $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

c $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{20}{2} - 3 - \frac{1}{2} \\ -1 + 0 + \frac{1}{4} \\ -4 + 3 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{13}{2} \\ -\frac{3}{4} \\ -1 \end{pmatrix}$

Vraagstuk **1.50 a** $A^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Trek de tweede kolom af van de eerste kolom:

$A^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Trek de derde kolom af van de eerste kolom:

$A^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Vanwege de nullen in de eerste kolom kunnen we de linker matrix niet omzetten in de eenheidsmatrix, zodat A geen inverse heeft. Dus A is singulier.

b Als we het stelsel $A\underline{x} = \underline{b}$ uitschrijven tot $\begin{cases} x_1 + x_2 = b_1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = b_2 \\ x_1 + x_3 = b_3 \end{cases}$,

dan zien we, dat voor wat betreft de linkerleden, vergelijking 1 en vergelijking 3 samen vergelijking 2 opleveren. Als dit ook voor de rechterleden geldt (dus als $b_2 = b_1 + b_3$), dan hebben we te maken met een stelsel met oneindig veel oplossingen. Geldt dit voor de rechterleden niet, dan hebben we te maken met een strijdig stelsel.
Een $\underline{b}$ waarvoor het stelsel geen oplossing heeft is bijvoorbeeld $\underline{b} = (1,1,1)$.

c Een $\underline{b}$ waarvoor het stelsel oneindig veel oplossingen heeft is bijvoorbeeld $\underline{b} = (0,1,1)$.

Vraagstuk **1.51 a**

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5 \\ 4x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 3 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$$

Pas *partial pivoting* toe op de eerste kolom:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$$

Veeg de eerste kolom onder de hoofddiagonaal schoon:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 3 \\ x_2 + \tfrac{1}{2}x_3 = 3\tfrac{1}{2} \\ -5x_2 + 2\tfrac{1}{2}x_3 = -2\tfrac{1}{2} \end{cases}$$

Pas *partial pivoting* toe op de tweede kolom:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 3 \\ -5x_2 + 2\tfrac{1}{2}x_3 = -2\tfrac{1}{2} \\ x_2 + \tfrac{1}{2}x_3 = 3\tfrac{1}{2} \end{cases}$$

Veeg de tweede kolom onder de hoofddiagonaal schoon:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 3 \\ -5x_2 + 2\tfrac{1}{2}x_3 = -2\tfrac{1}{2} \\ x_3 = 3 \end{cases}$$

Uit de terugsubstitutie volgt: $x_3 = 3$, $x_2 = 2$ en $x_1 = 1$.

b

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 - 4x_3 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 = 4 \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$$

Pas *partial pivoting* toe op de eerste kolom:

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 = 4 \\ -x_1 + x_2 - 4x_3 = 2 \end{cases}$$

Veeg de eerste kolom onder de hoofddiagonaal schoon:

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 2 \\ -1\tfrac{1}{3}x_3 = 2\tfrac{2}{3} \\ 2x_2 - 3\tfrac{1}{3}x_3 = 2\tfrac{2}{3} \end{cases}$$

Pas *partial pivoting* toe op de tweede kolom:

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 2 \\ 2x_2 - 3\tfrac{1}{3}x_3 = 2\tfrac{2}{3} \\ -1\tfrac{1}{3}x_3 = 2\tfrac{2}{3} \end{cases}$$

Terugsubstitutie levert: $x_3 = -2$, $x_2 = -2$ en $x_1 = 4$.

c $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 5 \end{cases}$ Pas *partial pivoting* toe op de eerste kolom:

$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 5 \end{cases}$ Veeg de eerste kolom schoon:

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 1 \\ \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 = 2\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_3 = 4\frac{1}{3} \end{cases}$$

We zien dat de tweede en de derde vergelijking strijdig zijn met elkaar: het stelsel heeft geen oplossingen.

Vraagstuk **1.52** We gebruiken de eliminatiemethode van Gauss en beginnen met het schoonvegen van de eerste kolom onder de hoofddiagonaal:

$$\begin{cases} (p+2)\, x_1 - 2x_2 = 1 \\ 3x_1 - (p+1)\, x_2 = p^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (p+2)\, x_1 - 2x_2 = 1 \\ \left(-(p+1) + \dfrac{6}{p+2}\right) x_2 = p^2 - \dfrac{3}{p+2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x_2 = \frac{p^2 - \dfrac{3}{p+2}}{\left(-(p+1) + \dfrac{6}{p+2}\right)} = \frac{p^2(p+2) - 3}{-(p+1)(p+2) + 6}$$

$$= \frac{p^3 + 2p^2 - 3}{-p^2 - 3p + 4} = \frac{(p^2 + 3p + 3)(p-1)}{-(p+4)(p-1)}$$

Voor $p \neq -4$ of $p \neq 1$ bestaat x_2 (en ook x_1) en heeft dit stelsel precies één stel oplossingen. Voor $p = 1$ zijn er oneindig veel oplossingen en voor $p = -4$ zijn er geen oplossingen.

1.2.6 Toepassingen met computeralgebra

Voorbeeld vakwerk De nullen hebben betrekking op knopen die niet bij het element behoren.

Opdracht **11** Het volgende stelsel vergelijkingen gaan we oplossen:

$$\begin{pmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ 0 \\ -10\,000 \\ F_{3x} \\ F_{3y} \end{pmatrix} = \frac{EA}{25l} \begin{pmatrix} 9 & -12 & -9 & 12 & 0 & 0 \\ -12 & 16 & 12 & -16 & 0 & 0 \\ -9 & 12 & 18 & 0 & -9 & -12 \\ 12 & -16 & 0 & 32 & -12 & -16 \\ 0 & 0 & -9 & -12 & 9 & 12 \\ 0 & 0 & -12 & -16 & 12 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u_{2x} \\ u_{2y} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

De oplossing hiervan luidt: $u_{2x} = 0$, $u_{2y} = \dfrac{-250\,000l}{32EA}$ en

$F_{1x} = -3\,750$ N, $F_{1y} = 5\,000$ N, $F_{3x} = 3\,750$ N en $F_{3y} = 5\,000$ N.

Opdracht **12** De matrixvergelijking is:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 8 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_A \\ M_B \\ M_C \\ M_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 48 \\ 96 \\ 108 \\ 60 \end{pmatrix}$$

Met *Maple*:
De momenten vinden we met:

```
> with(linalg):
> A := matrix(4,4,[4, 2, 0, 0, 2, 8, 2, 0, 0, 2, 8, 2, 0, 0, 2, 4]);
> x := vector([48, 96, 108, 60]);
> Ainv := inverse(A);
> y := evalm(&*(ainv,x));
```

Het resultaat is: $M_A = \dfrac{122}{15}$, $M_B = \dfrac{116}{15}$, $M_C = \dfrac{134}{15}$ en $M_D = \dfrac{158}{15}$

De hoekverdraaiingen vinden we als volgt:

```
> h1 := vector([4/(6*EI), 4/(3*EI), 0, 0]);
> phiba := dotprod(h1, y)-6*4^3/(24*EI);
> h2 := vector([0, 4/(6*EI), 4/(3*EI), 0]);
> phicb := dotprod(h2, y)-6*4^3/(24*EI);
```

Het resultaat is: $Q_{BA} = \dfrac{4}{15EI}$ en $Q_{BC} = \dfrac{16}{15EI}$

Vraagstuk **1.53 a** Element 1 ($\alpha = 0$, $s = 0$, $c = 1$, $l = 3$): $S_1 = \dfrac{EA}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Element 2 ($s = \frac{4}{5}$, $c = -\frac{3}{5}$, $l = 5$): $S_2 = \dfrac{EA}{125} \begin{pmatrix} 9 & -12 & -9 & 12 \\ -12 & 16 & 12 & -16 \\ -9 & 12 & 9 & -12 \\ 12 & -16 & -12 & 16 \end{pmatrix}$

Element 3 ($\alpha = \frac{\pi}{2}$, $s = 1$, $c = 0$, $l = 4$): $S_3 = \dfrac{EA}{4} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b De stijfheidsmatrix van de constructie wordt dan:

$$S = \frac{EA}{1500}\begin{pmatrix} 500 & 0 & -500 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 375 & 0 & 0 & 0 & -375 \\ -500 & 0 & 608 & -144 & -108 & 144 \\ 0 & 0 & -144 & 192 & 144 & -192 \\ 0 & 0 & -108 & 144 & 108 & -144 \\ 0 & -375 & 144 & -192 & -144 & 567 \end{pmatrix}$$

c De beide verplaatsingen in knoop 1 zijn nul, dus: $u_{1x} = u_{1y} = 0$.
De verticale verplaatsing in knoop 2 is nul, dus: $u_{2y} = 0$.
De uitwendige horizontale belasting in knoop 3 is 10 kN,
dus: $F_{3x} = 10$ en $F_{3y} = 0$.
De horizontale reactiekracht in knoop 2 is nul, dus: $F_{2x} = 0$.

d De horizontale verplaatsing van knoop 2 en de beide verplaatsingen van knoop 3 zijn onbekend, evenals de beide reactiekrachten in knoop 1 en de verticale reactiekracht in knoop 2.

e De oplossing van het stelsel vergelijkingen:

$$\begin{pmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ 0 \\ F_{2y} \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{EA}{1\,500}\begin{pmatrix} 500 & 0 & -500 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 375 & 0 & 0 & 0 & -375 \\ -500 & 0 & 608 & -144 & -108 & 144 \\ 0 & 0 & -144 & 192 & 144 & -192 \\ 0 & 0 & -108 & 144 & 108 & -144 \\ 0 & -375 & 144 & -192 & -144 & 567 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u_{2x} \\ 0 \\ u_{3x} \\ u_{3y} \end{pmatrix}$$

kan worden gevonden met een computeralgebrapakket.
Het resultaat hiervan is:

$$u_{2x} = \frac{30}{EA},\ u_{3x} = \frac{240}{EA},\ u_{3y} = \frac{160}{3EA}$$

$$F_{1x} = -10,\ F_{1y} = -\frac{40}{3},\ F_{2y} = \frac{40}{3}$$

Toets

1 $$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 3 \\ 5x_1 - 2x_2 + x_3 = -5 \\ 3x_2 + 5x_3 - x_4 = 2 \\ x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$$

Pas *partial pivoting* toe op de eerste kolom:

$$\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + x_3 = -5 \\ 2x_1 + x_2 = 3 \\ 3x_2 + 5x_3 - x_4 = 2 \\ x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$$

Veeg de eerste kolom onder de hoofddiagonaal schoon:

$$\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + x_3 & = -5 \\ 1{,}8x_2 - 0{,}4x_3 & = 5 \\ 3x_2 + 5x_3 - x_4 & = 2 \\ x_3 + x_4 & = 1 \end{cases}$$

Pas *partial pivoting* toe op de tweede kolom:

$$\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + x_3 & = -5 \\ 3x_2 + 5x_3 - x_4 & = 2 \\ 1{,}8x_2 - 0{,}4x_3 & = 5 \\ x_3 + x_4 & = 1 \end{cases}$$

Veeg de tweede kolom onder de hoofddiagonaal schoon:

$$\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + x_3 & = -5 \\ 3x_2 + 5x_3 - x_4 & = 2 \\ -3{,}4x_3 + 0{,}6x_4 & = 3{,}8 \\ x_3 + x_4 & = 1 \end{cases}$$

Veeg de derde kolom onder de hoofddiagonaal schoon:

$$\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + x_3 & = -5 \\ 3x_2 + 5x_3 - x_4 & = 2 \\ -3{,}4x_3 + 0{,}6x_4 & = 3{,}8 \\ 1{,}177x_4 & = 2{,}117 \end{cases}$$

Via terugsubstitutie vinden we:
$x_4 = 1{,}8$, $x_3 = -0{,}8$, $x_2 = 2{,}6$ en $x_1 = 0{,}2$

In *Derive*:

$$\#1 \quad A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

```
#2   b:= [3 -5  2  1]

#3   x:= A^-1 ·b
```

$$\left[\frac{1}{5}, \frac{13}{5}, -\frac{4}{5}, \frac{9}{5}\right]$$

2 We passen de eliminatiemethode van Gauss toe:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + (p+1)\,x_3 & = 1 \\ x_1 + (p-5)\,x_2 + 5x_3 & = p - 3 \\ (p+2)x_1 - 6x_2 + 6x_3 & = 2 \end{cases}$$

Veeg de eerste kolom onder de hoofddiagonaal schoon:

$$\begin{cases} x_1 - \quad x_2 + \quad (p+1)\,x_3 = 1 \\ (p-4)\,x_2 + \quad (4-p)\,x_3 = p-4 \\ (p-4)\,x_2 - (p+4)(p-1)\,x_3 = -p \end{cases}$$

Veeg de tweede kolom onder de hoofddiagonaal schoon:

$$\begin{cases} x_1 - \quad x_2 + \quad (p+1)\,x_3 = 1 \\ (p-4)\,x_2 + \quad (4-p)\,x_3 = p-4 \\ -p\,(p+2)\,x_3 = -2p+4 \end{cases}$$

Uit de terugsubstitutie blijkt: $x_3 = \dfrac{-2p+4}{-p(p+2)} = \dfrac{2(p-2)}{p(p+2)}$

Voor $p \neq -2$ bestaat x_3 (en ook x_2 en x_1) en heeft dit stelsel vergelijkingen precies één stel oplossingen, voor $p = 0$ en $p = -2$ zijn er geen oplossingen.

3 a $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

b We bepalen de inverse van A met behulp van de veegmethode:

$A^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 6 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Trek de eerste kolom 2 × af van de tweede kolom:

$A^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Deel de tweede kolom door 4:

$A^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Trek de tweede kolom af van de eerste en van de derde kolom:

$A^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Trek de eerste kolom af van de derde kolom:

$A^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Trek de derde kolom af van de eerste kolom:

$A^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Zet de kolommen op de juiste plaats:

$$A^{-1}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\frac{1}{2}&-1&-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{4}&0&\frac{1}{4}\\-1&1&0\end{pmatrix}\text{, dus } A^{-1}=\begin{pmatrix}2\frac{1}{2}&-1&-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{4}&0&\frac{1}{4}\\-1&1&0\end{pmatrix}$$

Ten slotte berekenen we de oplossingen m.b.v. $\underline{x} = A^{-1}\underline{b}$:

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\frac{1}{2}&-1&-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{4}&0&\frac{1}{4}\\-1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}8\\-1\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}19\\-1\\-9\end{pmatrix}$$

dus $x_1 = 19$, $x_2 = -1$ en $x_3 = -9$.

4 We gebruiken de eliminatiemethode van Gauss:

$$\begin{cases}x + py + z = 1\\px + y + z = p\\x + y + z = 2\end{cases}$$

Veeg de eerste kolom onder de hoofddiagonaal schoon:

$$\begin{cases}x + py + z = 1\\(1-p^2)\,y + (1-p)\,z = 0\\(1-p)\,y = 1\end{cases}$$

Uit de derde vergelijking volgt nu al: $y = \dfrac{1}{1-p}$

De bewering is dus **niet juist**.

Leereenheid 1.3

Determinanten, eigenwaarden, eigenvectoren

Praktijksituatie

Opdracht **1** $x_1 = \begin{pmatrix} 0{,}95 & 0{,}02 \\ 0{,}05 & 0{,}98 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}97 \\ 1{,}03 \end{pmatrix}$

$x_2 = \begin{pmatrix} 0{,}95 & 0{,}02 \\ 0{,}05 & 0{,}98 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}97 \\ 1{,}03 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}942 \\ 1{,}058 \end{pmatrix}$

$x_3 = \begin{pmatrix} 0{,}95 & 0{,}02 \\ 0{,}05 & 0{,}98 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}942 \\ 1{,}058 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}916 \\ 1{,}084 \end{pmatrix}$

Opdracht **2** Het gaat om het volgende stelsel vergelijkingen:

$$\begin{cases} 0{,}95l_\infty + 0{,}02g_\infty = l_\infty \\ 0{,}05l_\infty + 0{,}98g_\infty = g_\infty \end{cases}, \text{ ofwel } \begin{cases} -0{,}05l_\infty + 0{,}02g_\infty = 0 \\ 0{,}05l_\infty - 0{,}02g_\infty = 0 \end{cases}$$

Dit is een afhankelijk stelsel, waaruit we kunnen concluderen:

$g_\infty = \dfrac{0{,}05}{0{,}02} l_\infty$ of ook $\dfrac{g_\infty}{l_\infty} = \frac{5}{2}$

Op den duur zal dus $\frac{2}{7}$ deel van x vloeistof zijn en $\frac{5}{7}$ deel gas.

1.3.1 Introductie van het begrip determinant

Opdracht 3 $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix} = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta = \sin(\alpha-\beta)$

(met behulp van de som/verschil-formules uit de goniometrie)

Opdracht 4 $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix} = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

Vraagstuk **1.54** *Eigenschap 2*

Als $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, dan is

$$\begin{aligned} \det(\underline{a}_1 \mid \underline{a}_2 + \alpha\,\underline{a}_1) &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} + \alpha\, a_{11} \\ a_{21} & a_{22} + \alpha\, a_{21} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}(a_{22} + \alpha\, a_{21}) - a_{21}(a_{12} + \alpha\, a_{11}) \\ &= a_{11}a_{22} + \alpha\, a_{11}a_{21} - a_{21}a_{12} - \alpha\, a_{21}a_{11} \\ &= a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = \det(\underline{a}_1 \mid \underline{a}_2) \end{aligned}$$

Evenzo kun je bewijzen dat $\det(\underline{a}_1 \mid \underline{a}_2) = \det(\underline{a}_1 + \beta\,\underline{a}_2 \mid \underline{a}_2)$.

Eigenschap 3

Als $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, dan is $A' = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{pmatrix}$, dan geldt:

$\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$ en
$\det(A') = a_{21}a_{12} - a_{11}a_{22} = -(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = -\det(A)$

Eigenschap 4

Als $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ en $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$, dan is:

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

Hieruit volgt:

$$\begin{aligned} |AB| &= (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21})(a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}) \\ &\quad - (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22})(a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21}) \\ &= a_{11}b_{11}a_{21}b_{12} + a_{11}b_{11}a_{22}b_{22} + a_{12}b_{21}a_{21}b_{12} + a_{12}b_{21}a_{22}b_{22} \\ &\quad - a_{11}b_{12}a_{21}b_{11} - a_{11}b_{12}a_{22}b_{21} - a_{12}b_{22}a_{21}b_{11} - a_{12}b_{22}a_{22}b_{21} \end{aligned}$$

De eerste en de vijfde term vallen tegen elkaar weg, evenals de vierde en de achtste, zodat:

$$\begin{aligned} |AB| &= a_{11}b_{11}a_{22}b_{22} + a_{12}b_{21}a_{21}b_{12} - a_{11}b_{12}a_{22}b_{21} - a_{12}b_{22}a_{21}b_{11} \\ &= a_{11}b_{11}a_{22}b_{22} - a_{11}b_{12}a_{22}b_{21} + a_{12}b_{21}a_{21}b_{12} - a_{12}b_{22}a_{21}b_{11} \\ &= (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})(b_{11}b_{22} - b_{21}b_{12}) = |A| \cdot |B| \end{aligned}$$

Vraagstuk **1.55 a** $\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 18 = -16$

b $\begin{vmatrix} 6 & -2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 0 - (-8) = 8$

Vraagstuk **1.56 a** $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

b det $(A) = 2$, det $(A^{-1}) = \frac{1}{2}$

c Er geldt: $AA^{-1} = I$, dus det (AA^{-1}) = det (I). Met behulp van eigenschap 4 krijgen we:

det $(A) \cdot (A^{-1})$ = det (I), dus det $(A^{-1}) = \dfrac{\det(I)}{\det(A)}$

Omdat det $(I) = 1$ (ga na!) vinden we dus: det $(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$

1.3.2 De determinant van een 3 × 3- en van een *n* × *n*-matrix

Opdracht **5** $A_{24} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 1 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $A_{11} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -4 \\ 5 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ en $A_{21} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 5 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

Opdracht **6** $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & -4 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 3 & -4 \end{vmatrix}$

$= -1(-6 - 4) - 2(-6) + 0 \cdot (-12 - 0)$
$= 10 + 12 + 0 = 22$

Opdracht **7** $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 7 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 7 \end{vmatrix}$

$= 1\left(1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\right) - 2 \cdot \left(1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\right)$

$= 1(7 - 4 + 2 - 2) - 2(8 - 1) = -11$

Vraagstuk **1.57 a** $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 6 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 + 3 \cdot (-14) = -38$

(ontwikkeld naar de derde kolom)

b $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 7 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -7 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -7 \cdot (-1) = 7$

(ontwikkeld naar de derde kolom)

c $$\begin{vmatrix}1&2&1&1\\0&3&1&2\\1&2&0&3\\0&1&1&4\end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix}3&1&2\\2&0&3\\1&1&4\end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix}2&1&1\\3&1&2\\1&1&4\end{vmatrix}$$

(ontwikkeld naar de eerste kolom)

$$= 1\cdot\begin{vmatrix}2&0&-2\\2&0&3\\1&1&4\end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix}0&1&0\\1&1&1\\-1&1&3\end{vmatrix}$$

(in de eerste determinant: trek de derde rij van de eerste rij af; in de tweede determinant: trek de tweede kolom 2 × van de eerste kolom af en 1 × van de derde)

$$= 1\cdot(-1)\cdot\begin{vmatrix}2&-2\\2&3\end{vmatrix} + 1\cdot(-1)\cdot\begin{vmatrix}1&1\\-1&3\end{vmatrix}$$

$$= 1\cdot(-1)\cdot 10 + 1\cdot(-1)\cdot 4 = -14$$

d $$\begin{vmatrix}1&3&4&8&7\\0&6&5&0&0\\0&0&7&2&8\\0&0&0&3&0\\0&0&0&0&1\end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix}6&5&0&0\\0&7&2&8\\0&0&3&0\\0&0&0&1\end{vmatrix} = 1\cdot 6\cdot\begin{vmatrix}7&2&8\\0&3&0\\0&0&1\end{vmatrix}$$

$$= 1\cdot 6\cdot 7\cdot\begin{vmatrix}3&0\\0&1\end{vmatrix} = 1\cdot 6\cdot 7\cdot 3 = 126$$

(steeds naar de eerste kolom ontwikkeld)

Vraagstuk **1.58 a** $$\begin{vmatrix}125&60&80\\25&30&40\\625&0&1\end{vmatrix} = 25\cdot 30\cdot\begin{vmatrix}5&2&80\\1&1&40\\25&0&1\end{vmatrix}$$

$$= 750\left(25\cdot\begin{vmatrix}2&80\\1&40\end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix}5&2\\1&1\end{vmatrix}\right)$$

$$= 750\,(25\cdot 0 + 1\cdot 3) = 2\,250$$

b $$\begin{vmatrix}a&3&0\\a&7&1\\a&1&0\end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix}a&3&0\\0&4&1\\0&-2&0\end{vmatrix} = a\cdot\begin{vmatrix}4&1\\-2&0\end{vmatrix} = 2a$$

(1): trek de eerste rij 1 × van de tweede en van de derde rij af

Vraagstuk **1.59** $$\begin{vmatrix}1&x&0\\2x&4&0\\2&3&x\end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x\cdot\begin{vmatrix}1&x\\2x&4\end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x(4-2x^2) = 0$$

$\Leftrightarrow x = 0$ of $x = -\sqrt{2}$ of $x = \sqrt{2}$

Vraagstuk **1.60** $$\begin{vmatrix}a+b&c+d&1\\b+c&d+a&1\\c+a&b+d&1\end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix}0&0&1\\c-a&a-c&1\\c-b&b-c&1\end{vmatrix} \overset{(2)}{=} \begin{vmatrix}0&0&1\\0&a-c&1\\0&b-c&1\end{vmatrix} = 0$$

(1): trek de derde kolom $a + b$ keer van de eerste kolom af en $c + d$ keer van de tweede kolom
(2): tel de tweede kolom op bij de eerste kolom

$$\begin{vmatrix} x_1+x_2 & x_2+x_3 & x_1+x_3 \\ x_3 & x_1 & x_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 0 & x_3-x_1 & x_3-x_2 \\ 0 & x_1-x_3 & x_2-x_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_1-x_3 & x_2-x_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

(1): trek de derde rij $x_1 + x_2$ keer af van de eerste rij en x_3 keer af van de tweede rij
(2): tel de tweede rij op bij de eerste rij

Vraagstuk **1.61** Stel det (A) = det $(\underline{a}_1 \mid \underline{a}_2 \mid \ldots \mid \underline{a}_n)$, dan is:

$$\begin{aligned} \det(\lambda A) &= \det(\lambda\underline{a}_1 \mid \lambda\underline{a}_2 \mid \ldots \mid \lambda\underline{a}_n) \\ &= \lambda \det(\underline{a}_1 \mid \lambda\underline{a}_2 \mid \ldots \mid \lambda\underline{a}_n) \\ &= \lambda^2 \det(\underline{a}_1 \mid \underline{a}_2 \mid \ldots \mid \lambda\underline{a}_n) \\ &= \ldots \\ &= \lambda^n \det(\underline{a}_1 \mid \underline{a}_2 \mid \ldots \mid \underline{a}_n) \\ &= \lambda^n \det(A) \end{aligned}$$

Vraagstuk **1.62 a** $|A^T| = 53$ en $|A| = 53$
b 53

Vraagstuk **1.63**

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 7-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (7-\lambda)\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow (7-\lambda)((3-\lambda)^2 - 4) = 0 \\ &\Leftrightarrow (7-\lambda)(\lambda^2 - 6\lambda + 5) = 0 \\ &\Leftrightarrow (7-\lambda)(\lambda-1)(\lambda-5) = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda = 7 \text{ of } \lambda = 1 \text{ of } \lambda = 5 \end{aligned}$$

Vraagstuk **1.64** We herschrijven het stelsel allereerst tot de vorm $A\underline{x} = \underline{b}$:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + (k-5)\,x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = 1 \\ -x_1 + (k+1)\,x_2 + kx_3 = k-3 \end{cases}$$

Vervolgens berekenen we de determinant van de coëfficiëntenmatrix:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & k-5 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & k+1 & k \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & k-5 \\ 0 & -2 & 3-k \\ 0 & k+2 & 2k-5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 3-k \\ k+2 & 2k-5 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= (-4k + 10) - (3-k)(k+2) \\ &= k^2 - 5k + 4 = (k-1)(k-4) \end{aligned}$$

(1): trek de eerste rij af van de tweede rij en tel hem op bij de derde rij

Voor $k = 1$ en voor $k = 4$ is de coëfficiëntenmatrix singulier en heeft het stelsel geen of oneindig veel oplossingen.

Vraagstuk **1.65 a**

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & g & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & g-1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} g-1 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2g$$

(1): trek de eerste rij af van de tweede rij en van de derde rij

b Voor $g = 0$ is het stelsel singulier, zodat het stelsel voor $g = 0$ geen of oneindig veel oplossingen heeft.

c h kan een willekeurig reëel getal zijn.

d We gebruiken de eliminatiemethode van Gauss:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + gx_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = h \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ (g-1)\,x_2 - 2x_3 = -1 \\ x_2 + 2x_3 = h-2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_2 + 2x_3 = h-2 \\ (g-1)\,x_2 - 2x_3 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_2 + x_3 = h-2 \\ -2gx_3 = -gh + 2g + h - 3 \end{cases} \Leftrightarrow x_3 = \frac{gh - 2g - h + 3}{2g}$$

$$x_2 = h - 2 - 2x_3 = h - 2 - 2\,\frac{gh - 2g - h + 3}{2g} = \frac{h-3}{g}$$

$$x_1 = 2 - x_2 - x_3 = 2 - \frac{h-3}{g} - \frac{gh - 2g - h + 3}{2g} = \frac{3 - h + 6g - gh}{2g}$$

1.3.3 Regel van Cramer

Vraagstuk **1.66**

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 & -1 \\ -4 & -1 & -1 & 0 \\ 6 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 2 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -3 \end{vmatrix}} \overset{(1)}{=} \frac{1 \cdot \begin{vmatrix} -4 & -1 & -1 \\ 6 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -4 & -1 & -1 \\ 6 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}$$

$$\overset{(2)}{=} \frac{1 \cdot \begin{vmatrix} -4 & -1 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ -4 & -1 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}$$

$$\overset{(3)}{=} \frac{1 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} -4 & -1 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} - 3 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} -4 & -1 \\ 6 & 1 \end{vmatrix}}{1 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 3 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{1 \cdot 1 \cdot 2 - 3 \cdot (-1) \cdot 2}{1 \cdot 1 \cdot 2 - 3 \cdot (-1) \cdot 2} = \frac{8}{8} = 1$$

(1): ontwikkel beide determinanten naar de vierde kolom
(2): trek in alle determinanten de tweede kolom af van de derde kolom
(3): ontwikkel alle determinanten naar de derde kolom
Op analoge wijze vinden we: $x_2 = 2$, $x_3 = 3$ en $x_4 = 4$.

Vraagstuk **1.67** De bewering is niet juist. We berekenen x_1 met behulp van de regel van Cramer:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ a & 1 & a^2-5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & a^2-5 \end{vmatrix}} \overset{(1)}{=} \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ a & 1 & a^2-6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & a^2-6 \end{vmatrix}}$$

$$\overset{(2)}{=} \frac{1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ a & 1 \end{vmatrix} + (a_2 - 6) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}}{(a^2 - 6) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{2 - a + a^2 - 6}{(a^2 - 6)}$$

(1): in de teller: trek de tweede kolom af van de derde kolom; in de noemer: trek de eerste kolom af van de derde kolom
(2): ontwikkel beide determinanten naar de derde kolom

Voor $a = \sqrt{6}$ is de noemer gelijk aan nul, maar de teller ongelijk nul; dus het stelsel heeft geen oplossingen.

1.3.4 Eigenwaarden en eigenvectoren

Opdracht **8** Geen uitwerking.

Vraagstuk **1.68 a** We bepalen eerst de eigenwaarden uit det $(A - \lambda I) = 0$:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)(-1-\lambda)(2-\lambda) = 0$$

Dus de eigenwaarden zijn: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$ en $\lambda_3 = 2$.
Bij elke eigenwaarde bepalen we de eigenvector(en) met behulp van $(A - \lambda I)\,\underline{u} = \underline{o}$. Bij λ_1 vinden we:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{21} \\ u_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} u_{21} = 0 \\ -2u_{21} = 0 \\ u_{31} = 0 \end{cases}$$

Dus met u_{11} willekeurig en $u_{21} = u_{31} = 0$ schrijven we:

$\underline{u}_1 = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ met α in $\mathbb{R}$. We kiezen: $\underline{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Bij λ_2 vinden we:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{12} \\ u_{22} \\ u_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2u_{12} + u_{22} = 0 \\ 3u_{32} = 0 \end{cases}$$

Dus met $u_{22} = 2u_{12}$ en $u_{32} = 0$ schrijven we:

$\underline{u}_2 = \begin{pmatrix} \beta \\ -2\beta \\ 0 \end{pmatrix}$ met β in $\mathbb{R}$. We kiezen: $\underline{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Ten slotte bij λ_3:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{13} \\ u_{23} \\ u_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -u_{13} = 0 \\ u_{13} - 3u_{23} = 0 \end{cases}$$

Dus met $u_{13} = u_{23} = 0$ en u_{33} willekeurig schrijven we:

$\underline{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \gamma \end{pmatrix}$ met γ in $\mathbb{R}$. We kiezen: $\underline{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

b $$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 2 & 3-\lambda & 1 \\ 3 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} -5-\lambda & 2 & 3 \\ 0 & 3-\lambda & 1 \\ 1+2\lambda & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\overset{(2)}{=} (-5-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} + (1+2\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3-\lambda & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 0$$

(1): trek 2 × de derde kolom af van de eerste kolom
(2): ontwikkel de determinant naar de eerste kolom
$\Rightarrow (-5-\lambda)((3-\lambda)(1-\lambda) - 2) + (1+2\lambda)(2 - 3(3-\lambda)) = 0$
$\Rightarrow (-5-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 1) + (1+2\lambda)(3\lambda - 7) = 0$
$\Rightarrow \lambda^3 - 5\lambda^2 - 8\lambda + 12 = 0$
$\Rightarrow (\lambda - 1)(\lambda + 2)(\lambda - 6) = 0$

Dus de eigenwaarden zijn $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$ en $\lambda_3 = 6$.
Vervolgens berekenen we de bijbehorende eigenvectoren.
Allereerst de eigenvector bij λ_1:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{21} \\ u_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \phantom{2u_{11} +{}} 2u_{21} + 3u_{31} = 0 \\ 2u_{11} + 2u_{21} + u_{31} = 0 \\ 3u_{11} + 2u_{21} \phantom{{}+ 3u_{31}} = 0 \end{cases}$$

Dus met $2u_{21} = -3u_{31}$ en $2u_{21} = -3u_{11}$ krijgen we:

$\underline{u}_1 = \begin{pmatrix} 2\alpha \\ -3\alpha \\ 2\alpha \end{pmatrix}$ met α in $\mathbb{R}$. We kiezen: $\underline{u}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

Op analoge wijze vinden we bij λ_2: $\underline{u}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -11 \end{pmatrix}$

en bij λ_3: $\underline{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

c Als eigenwaarden vinden we: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 6$ en $\lambda_3 = -1$.
De bijbehorende eigenvectoren zijn:

$\underline{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\underline{u}_2 = \begin{pmatrix} 8 \\ 20 \\ 5 \end{pmatrix}$ en $\underline{u}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

vraagstuk **1.69 a** $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix}$

$$= (1-\lambda)\,(-1-\lambda)\,(2-\lambda) = 0$$

Hieruit volgt: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$ en $\lambda_3 = 2$.

Bij de eigenwaarde λ_1: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{21} \\ u_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Dus met $u_{21} = u_{31} = 0$ en u_{11} willekeurig vinden we als eigenvector: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Bij de eigenwaarde λ_2: $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{12} \\ u_{22} \\ u_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Dus met $u_{32} = 0$ en $u_{22} = -2u_{12}$ vinden we als eigenvector: $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Bij de eigenwaarde λ_3: $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{13} \\ u_{23} \\ u_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Dus met $u_{13} = u_{23} = 0$ en u_{33} willekeurig vinden we als eigenvector: $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

b $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

c De eigenwaarden van A^{-1} zijn: 1, –1 en $\frac{1}{2}$. De bijbehorende eigenvectoren zijn respectievelijk $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Wat opvalt is dat de eigenwaarden het omgekeerde zijn van de eigenwaarden van A en dat de bijbehorende eigenvectoren dezelfde zijn als die van A.

Vraagstuk **1.70** De eigenwaarden bepalen we uit de vergelijking:

$$\begin{vmatrix} \cos\varphi - \lambda & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Hieruit volgt:

$$(1 - \lambda \begin{vmatrix} \cos\varphi - \lambda & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi - \lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)((\cos\varphi - \lambda)^2 + \sin^2\varphi) = 0$$

$\Rightarrow (1-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda\cos\varphi + \cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = 0$
$\Rightarrow (1-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda\cos\varphi + 1) = 0$
$\Rightarrow \lambda = 1$ of $\lambda^2 - 2\lambda\cos\varphi + 1 = 0$

Als er meer dan één (reële) eigenwaarde moet zijn, moet de vergelijking $\lambda^2 - 2\lambda\cos\varphi + 1 = 0$ minstens één (reële) eigenwaarde hebben. Dus moet de discriminant van $\lambda^2 - 2\lambda\cos\varphi + 1 = 0$ groter dan of gelijk zijn aan nul. Dus:
$4\cos^2\varphi - 4 \geqq 0$
Hieraan voldoet: $\cos\varphi = -1$ of $\cos\varphi = 1$, waaruit volgt:
$\varphi = \pi + 2k\pi$ of $\varphi = 0 + 2k\pi$

Vraagstuk **1.71** De matrix uit de praktijksituatie is $A = \begin{pmatrix} 0{,}95 & 0{,}02 \\ 0{,}05 & 0{,}98 \end{pmatrix}$

Eigenwaarden bepalen we uit $\det(A - \lambda I) = 0$, dus:

$$\begin{vmatrix} 0{,}95-\lambda & 0{,}02 \\ 0{,}05 & 0{,}98-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$\Leftrightarrow (0{,}95-\lambda)(0{,}98-\lambda) - 0{,}02 \cdot 0{,}05 = 0$
$\Leftrightarrow 0{,}931 - 1{,}93\lambda + \lambda^2 - 0{,}001 = 0$
$\Leftrightarrow \lambda^2 - 1{,}93\lambda + 0{,}93 = 0$
$\Leftrightarrow (\lambda - 1)(\lambda - 0{,}93) = 0$
$\Leftrightarrow \lambda = 1$ of $\lambda = 0{,}93$

We bepalen de eigenvector bij $\lambda = 1$:

$$\begin{pmatrix} -0{,}05 & 0{,}02 \\ 0{,}05 & -0{,}02 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_2 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$\Leftrightarrow 0{,}05u_1 - 0{,}02u_2 = 0$
$\Leftrightarrow 5u_1 = 2u_2$

We nemen als eigenvector: $\underline{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

We bepalen de eigenvector bij $\lambda = 0{,}93$:

$$\begin{pmatrix} 0{,}02 & 0{,}02 \\ 0{,}05 & 0{,}05 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow 0{,}02u_1 + 0{,}02u_2 = 0$
$\Leftrightarrow u_1 + u_2 = 0$
$\Leftrightarrow u_1 = -u_2$

We nemen als eigenvector: $\underline{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

1.3.5 Toepassingen met computeralgebra

Opdracht 9 De vleermuizen uit klasse 3 komen voort uit klasse 2 en 3. Van de vleermuizen uit klasse 2 overleeft 57% het eerste jaar en daarvan 57% het tweede jaar. Dus na twee jaar is de fractie overlevenden uit klasse 2 gelijk aan $0{,}57 \times 0{,}57 = 0{,}3249$. Voor de overlevenden uit klasse 3 geldt hetzelfde. In formule:
$x_3(k+1) = 0 \cdot x_1(k) + 0{,}3249 \cdot x_2(k) + 0{,}3249 \cdot x_3(k)$

Opdracht 10

$$\begin{pmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1{,}35 & 1{,}35 \\ 0{,}1596 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}3249 & 0{,}3249 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{pmatrix}$$

Opdracht 11 Met *Maple* maken we eenvoudig een rij uitkomsten met het **seq( )**-commando.

```
> with(linalg):
> L := matrix(3,3,[0, 1.35, 1.35, .1596, 0, 0, 0, .3249, .3249]):
> x_init := vector([500, 0, 0]):
> seq(evalm(L^i &*x_init),i = 1 .. 14);

  [0, 79.8000, 0], [107.730000, 0, 25.92702000],

    [35.00147700, 17.19370800, 8.423688800],

    [34.58348568, 5.586235730, 8.323092220],

    . . .

    [.6732925315, .1643796030, .1620390692],

    [.4406652076, .1074574880, .1060534266]

> seq( [2*i,trunc( dotprod((L^i&*x_init),[1, 1, 1]) )],i = 1 .. 14);
  [2, 79], [4, 133], [6, 60], [8, 48], [10, 28], [12, 19], [14, 12],
  [16, 8], [18, 5], [20, 3], [22, 2], [24, 1], [26, 0], [28, 0]
```

Met *Derive* gaat het via:

```
# vector(L^k*x,k,1,4)
```

De som per periode bepalen we met:

```
# vector(sum(L^k*x,k,1,4)
```

Opdracht **12**

```
> eigenvals(L);
                                                   -15
          -.3293324748, .6542324748, .1143494639 10
```

Opdracht **13** We bepalen een vector die dezelfde richting heeft als de eigenvector die hoort bij de dominante eigenwaarde en met som der componenten gelijk aan 500. We noemen deze stabieleverdeling.

```
> eigenvectors(L);
                  -17                 -7
  [-.3900000003 10, 1, {[-.190 10, -2.606155105, 2.606155112]}],

  [-.3293324749, 1, {[-1.817359710, .8807227736, -.4373779058]}],

  [ .6542324740, 1, {[-2.897941191, -.7069526987, -.6974378468]}]

> %[3][3];

    {[-2.897941191, -.7069526987, -.6974378468]}

> k:=op(%);

    k := [-2.897941191, -.7069526987, -.6974378468]

> k[1];

                         -2.897941191

> som:=sum(k[j],j=1..3);
                          som := -4.302331737

> stabieleverdeling:=evalm((500/som)*k);

    stabieleverdeling := [336.7872784, 82.15925018, 81.05347168]

> seq([2*i,trunc(dotprod((L^i&*stabieleverdeling),[1,1,1]))],i
=1..14 );

  [2, 327], [4, 214], [6, 140], [8, 91], [10, 59], [12, 39],
  [14, 25], [16, 16], [18, 10], [20, 7], [22, 4], [24, 3],
  [26, 2],  [28, 1]

> rij:=seq([2*i,evalm(L^i &*stabieleverdeling)],i = 1 .. 14);

  rij := [2, [220.3371745, 53.75124963, 53.02781333]],
         [4, [144.1517350, 35.16581305, 34.69251756]],
         [6, [94.30874632, 23.00661691, 22.69697163]],
         [8, [61.69984451, 15.05167591, 14.84909591]],
         . . .
         [20, [4.838120229, 1.180259339, 1.164374268]],
         [22, [3.165255372, .7721639885, .7617714590]],
         [24, [2.070812855, .5051747568, .4983756268]],
         [26, [1.354793019, .3305017316, .3260535197]],
         [28, [.8863495896, .2162249656, .2133148011]]
```

```
> rij[2][2][1]/rij[1][2][1];   rij[2][2][2]/rij[1][2][2];
> rij[14][2][1]/rij[13][2][1]; rij[14][2][3]/rij[13][2][3];
                                .6542324750
                                .6542324744
                                .6542324748
                                .6542324748
```

Opdracht **14**

```
> L_new := matrix(3,3,[0, 1.35, 1.35, .32, 0, 0, 0, .64, .64]):
> eigenvectors(L_new);

 [1.051026676, 1, {[-1.128953408, -.3437259010, -.5352075415]}],
 [-.4110266755, 1, {[-.7390460055, .5753756042, -.3503625506]}],
                   -10            -9
 [-.1838421421 10    , 1, {[.4 10   , -1.106682533, 1.106682533]} ]
```

Vraagstuk **1.72 a**

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_5 & 0 & -R_7 & R_8 \\ 0 & 0 & 0 & R_4 & 0 & R_6 & -R_7 & 0 \\ R_1 & -R_2 & 0 & R_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -R_2 & R_3 & 0 & R_5 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \\ i_6 \\ i_7 \\ i_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}1 \\ 0 \\ 0{,}3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b $$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{24} & \frac{1}{24} & \frac{-1}{24} & \frac{-5}{24} & \frac{1}{24} & \frac{-1}{12} & \frac{7}{24} & \frac{-1}{12} \\ \frac{7}{12} & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} & \frac{1}{6} & \frac{1}{24} & \frac{1}{24} & \frac{-5}{24} & \frac{-5}{24} \\ \frac{5}{24} & \frac{-5}{24} & \frac{-1}{24} & \frac{1}{24} & \frac{-1}{12} & \frac{1}{24} & \frac{-1}{12} & \frac{7}{24} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{12} & \frac{1}{6} & \frac{7}{12} & \frac{-1}{24} & \frac{5}{24} & \frac{5}{24} & \frac{-1}{24} \\ \frac{1}{6} & \frac{7}{12} & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} & \frac{5}{24} & \frac{-1}{24} & \frac{-1}{24} & \frac{5}{24} \\ -\frac{1}{24} & \frac{1}{24} & \frac{5}{24} & \frac{-5}{24} & \frac{-1}{12} & \frac{7}{24} & \frac{-1}{12} & \frac{1}{24} \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{6} & \frac{7}{12} & \frac{1}{6} & \frac{-5}{24} & \frac{-5}{24} & \frac{1}{24} & \frac{1}{24} \\ -\frac{1}{24} & \frac{-5}{24} & \frac{5}{24} & \frac{1}{24} & \frac{7}{24} & \frac{-1}{12} & \frac{1}{24} & \frac{-1}{12} \end{pmatrix}$$

c/d De oplossing luidt: $i_1 = 0{,}00833$, $i_2 = 0{,}08333$, $i_3 = 0{,}00833$, $i_4 = 0{,}06667$, $i_5 = 0{,}06667$, $i_6 = 0{,}058333$, $i_7 = 0{,}18333$ en $i_8 = 0{,}05833$

e Geen uitwerking.

Toets

1 De bewering is **niet waar**, want uit $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 4$ volgt:

$$\begin{vmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ g & h & i \end{vmatrix} = -4 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2d & 2e & 2f \\ a & b & c \\ g & h & i \end{vmatrix} = -8 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2d & 2e & 2f \\ g & h & i \\ a & b & c \end{vmatrix} = 8$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2d & 2e & 2f \\ -g & -h & -i \\ a & b & c \end{vmatrix} = -8 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2d & 2e & 2f \\ -g & -h & -i \\ 3a & 3b & 3c \end{vmatrix} = -24$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2d & 2e & 2f \\ -g & -h & -i \\ 3a+5g & 3b+5h & 3c+5i \end{vmatrix} = -24$$

2 De bewering is **niet waar**, want:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{13} \cdot \begin{vmatrix} 0 & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = -\, a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31}$$

3 De bewering is **niet waar**, want volgens de regel van Cramer geldt:

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ p & p & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & p & 1 \\ p & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ p-1 & p-1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & p-1 & 0 \\ p-1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{(p-1) \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{(p-1) \cdot \begin{vmatrix} p-1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{-(p-1)}{(p-1)^2} = \frac{1}{1-p}$$

4 $$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & -6 & -3 \\ 1 & -\frac{1}{2} & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -3 \\ 1 & 1\frac{1}{2} & -2 \end{vmatrix}} = \frac{2 \cdot \begin{vmatrix} -6 & -3 \\ -\frac{1}{2} & -2 \end{vmatrix}}{2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 1\frac{1}{2} & -2 \end{vmatrix}} = \frac{24-3}{0+9} = \frac{21}{9}$$

5 De bewering is **waar**; zie ook vraagstuk 1.61 uit deze leereenheid.

6 De bewering is **niet waar**, want:

$$\left| A_{31} \right| = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot (12-2) = 20$$

Met *Maple*:

```
> A31 := matrix(3,3,[2, -3, 4, 2, 1, 3, 0, -2, 3]):
> det(A31);
          20
```

7 a De eigenwaarden zijn 2, 1 en 1. De bijbehorende eigenvectoren zijn $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

b $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

c De eigenwaarden zijn $\frac{1}{2}$, 1 en 1. De bijbehorende eigenvectoren zijn $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

d De eigenwaarden van A^{-1} zijn de inverse van die van A (λ respectievelijk $1/\lambda$); de eigenvectoren zijn dezelfde als die van A.

e

```
> A := matrix(3,3,[0, 0, 1, 1, 2, 1, -1, 0, 2]):

> Ainv:=inverse(A);
                                 [ 2     0    -1 ]
                         Ainv := [-3/2  1/2  1/2]
                                 [ 1     0     0 ]
> eigenvals(A);
                                   2, 1, 1
> eigenvals(Ainv);
                                 1/2, 1, 1
> eigenvects(A);

              [1, 2,{[1, -2, 1]}], [2, 1,{[0, 1, 0]}]
> eigenvects(Ainv);
              [1/2, 1,{[0, 1, 0]}], [1, 2,{[1, -2, 1]}]
```

Eindtoets hoofdstuk 1

1 a Er geldt: $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 100$ en

$$\frac{2x_1 + x_2 + 2x_3}{3\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_2^3}} = \frac{3x_2}{3\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_2^3}}$$

Omdat $x_3 = 0$ kunnen we dit vereenvoudigen tot $x_1^2 + x_2^2 = 100$

en $\dfrac{2x_1 + x_2}{3\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} = \dfrac{3x_2}{3\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}$. Hieruit volgt $x_1^2 + x_2^2 = 100$

en $x_1 = x_2$, zodat $x_1 = \pm\, 5\sqrt{2}$ en $x_2 = \pm\, 5\sqrt{2}$.

De oplossing is dus: $\underline{x} = \begin{pmatrix} 5\sqrt{2} \\ 5\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ of $\underline{x} = \begin{pmatrix} -5\sqrt{2} \\ -5\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$

b De projectie van $\underline{x}$ op $\underline{a}$ is: $\underline{p} = \dfrac{5\sqrt{2}}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ of $\underline{p} = -\dfrac{5\sqrt{2}}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

2 a Kolom 1 en 2 staan loodrecht op elkaar voor elke α.
Kolom 1 en 3 staan loodrecht op elkaar voor elke α.
Kolom 2 en 3 staan loodrecht op elkaar als $\alpha + \alpha^2 = 0$, dus als $\alpha = 0$ of als $\alpha = -1$.

b M heeft geen inverse als det $(M) = 0$, dus als $-\alpha\,(\alpha^3 - 1) = 0$,
ofwel als $\alpha = 0$ of $\alpha = 1$ of $\alpha = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\, i\sqrt{3}$.

3 a Als $\underline{x}$ eigenvector is van A (met onbekende eigenwaarde λ),

moet gelden: $\begin{pmatrix} a & -2 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Hieruit volgt:

$$\begin{cases} a + 4 - 1 = \lambda \\ -2 - 4 - 2 = -2\lambda \\ -1 + 4 + b = \lambda \end{cases} \Leftrightarrow \lambda = 4,\ a = 1,\ b = 1$$

b $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

Uit det $(A - \lambda I) = 0$ volgt: $\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & -1 \\ -2 & 2-\lambda & -2 \\ -1 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$.

De oplossingen hiervan zijn $\lambda = -2$, $\lambda = 2$ en $\lambda = 4$.

Bij $\lambda = -2$ hoort de eigenvector $\underline{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ bij $\lambda = 2$ de eigenvector $\underline{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

en bij $\lambda = 4$ de eigenvector $\underline{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

4 $\begin{vmatrix} \mathrm{x} & 1 & -5 \\ -1 & x-1 & x \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \mathrm{x} \cdot \begin{vmatrix} x-1 & x \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 7 = 0$

Deze vergelijking heeft twee complexe oplossingen: $x = 1 \pm i\sqrt{6}$.

5 Met *Maple*:

```
> restart: with(linalg):
> M:=matrix([[0.9,0.2],[0.1,0.8]]):
> p_2000:=vector([100000,80000]);

                      p_2000 := [100000, 80000]

> p_2001:=evalm(M&*p_2000);

                      p_2001 := [106000.0, 74000.0]

> p_2010:=evalm(M^10&*p_2000);

                      p_2010 := [119435.0495, 60564.95050]

> solve({s=0.9*s+0.2*b,b=0.1*s+0.8*b},{s,b});

                      {s = 2. b, b = b}
> eigenvals(M);
                      1., .7000000000
> evs:=eigenvects(M);

    evs := [1.000000000, 1, {[.8944271910,  .4472135955]}],
           [.7000000000, 1, {[-.7453559925, .7453559925]}]

> st:=evs[1][3][1];
                      st := [.8944271910, .4472135955]

> stab:=evalm((1/(st[1]+st[2]))*st);
                      stab := [.6666666664, .3333333332]
```

Hier komt de verhouding twee op een te voorschijn! We berekenen nu de stabiele verdeling en checken die:

```
> stabieleverdeling:=evalm(180000*stab);

                      stabieleverdeling := [120000.0000, 59999.99998]
```

```
> seq(evalm((M^k)&*stabieleverdeling),k=1..10);

    [120000.0000, 59999.99998], %1, %1, %1, %1, %1, %1, %1, %1, %1

                %1 := [120000.0000, 59999.99999]
```