UITWERKINGEN

EN EXTRA, PRAKTIJKGERICHTE VRAAGSTUKKEN

Wiskunde

VOOR HET HOGER ONDERWIJS

DEEL 1

Noordhoff Uitgevers

Th.M. van Pelt
R.B.J. Pijlgroms
W.V. Smeets
J.L. Walter

Zevende druk

Wiskunde voor het hoger onderwijs

Deel 1

Uitwerkingen

Wiskunde voor het hoger onderwijs Deel 1

Uitwerkingen en extra, praktijkgerichte vraagstukken

Th.M. van Pelt

R.B.J. Pijlgroms

W.V. Smeets

J.L. Walter

Noordhoff Uitgevers Groningen/Houten

Zevende druk

Ontwerp omslag: G2K designers, Groningen/Amsterdam
Omslagillustratie: G2K designers, Groningen/Amsterdam

Eventuele op- en aanmerkingen over deze of andere uitgaven kunt u richten aan: Noordhoff Uitgevers bv, Afdeling Hoger Onderwijs, Antwoordnummer 13, 9700 VB Groningen, e-mail: info@noordhoff.nl

4 5 / 12 11

ISBN (ebook) 978-90-01-84907-8
ISBN 978-90-01-06746-5
NUR 123

Woord vooraf

In deze zevende druk van *Uitwerkingen en extra, praktijkgerichte vraagstukken* bij het leerboek *Wiskunde voor het hoger onderwijs, deel 1* zijn – zoals gewoonlijk – praktisch alle uitwerkingen van de opdrachten en vraagstukken opgenomen. Waar geen uitwerking is opgenomen is dit vermeld (geen uitwerking), is slechts het antwoord gegeven (veelal in de toetsen na leereenheden en in de eindtoets van een hoofdstuk), of wordt verwezen naar de begeleidende cd-rom (die ter beschikking staat van de docenten).

Net als in de vorige druk zijn alle uitwerkingen die met computeralgebra en spreadsheetprogramma's gemaakt moeten worden door de uitgever beschikbaar gesteld voor de docent en via deze dus ook voor de studenten; zie hiervoor www.wiskundevoorhetho.wolters.nl.

In hoofdstuk 5 staan weer een groot aantal praktijkgerichte vraagstukken waarvan de uitwerkingen (met computeralgebra en/of een spreadsheetprogramma) niet in dit boek, maar wel op de site staan. Hoe met deze verzameling vraagstukken omgegaan kan worden, wordt toegelicht in de inleiding van het betreffende hoofdstuk.

De auteurs houden zich aanbevolen voor het ontvangen van op- en aanmerkingen en suggesties van gebruikers ter verbetering van de inhoud.
We hopen dat ook deze druk zijn weg zal vinden in het wiskundeonderwijs.

De auteurs,
najaar 2005

Studiewijzer

Beste student(e),

Een boek vol met uitwerkingen! Dat lijkt erg handig, maar je moet er wel verstandig mee omgaan. Wij denken dat dat het beste als volgt kan.
Ga ervan uit dat je het meeste leert door *zelf* de opdrachten en vraagstukken uit het boek te maken. Van de fouten die je daarbij maakt, leer je veel over de stof en over jezelf. Maak die fouten dan ook eerst en bekijk *daarna* pas de uitwerkingen. Lees dus nooit de uitwerkingen van tevoren door, want dan leer je zelf niet genoeg. De uitwerkingen in dit boek zijn slechts een onderdeel van de aanpak voor het oplossen van een vraagstuk.

Bij het oplossen van ingewikkelde vraagstukken moet meer gebeuren dan in het uitwerkingenboek staat. Je zult altijd eerst moeten nagaan wat er precies *gevraagd* wordt en wat de *gegevens* in het vraagstuk zijn. Het gevraagde zul je daarna vaak in verband moeten brengen met de gegevens, door gebruik te maken van de in het hoofdstuk behandelde begrippen en definities. De uitwerkingen in dit boek zijn slechts het zichtbare deel van de omgekeerde oplossingsroute: de weg van de gegevens naar het gevraagde. Het denkwerk vooraf (van het gevraagde naar de gegevens) staat er niet altijd bij, maar dat moet je wel altijd eerst uitvoeren.

Na afloop van je berekening of oplossing moet je ook altijd bekijken:
- of de antwoorden 'ergens op lijken';
- of de uitkomst de orde van grootte heeft die je verwachtte;
- of het antwoord nog vereenvoudigd kan worden;
- of het antwoord klopt met dingen die je al wist;
- enzovoort.

Als je vastgelopen bent of geen begin kunt maken met de oplossing, kijk dan even kort naar de uitwerking, waardoor je vaak al snel een idee krijgt hoe je het vraagstuk moet aanpakken (hoe de oplossingsroute begint). Probeer het daarna weer zelf. Als je op deze manier, met vallen en opstaan, een vraagstuk hebt opgelost, gooi dan jouw uitwerking weg en probeer het nog eens helemaal zelf. Als dat lukt, heb je echt iets geleerd!
Een voordeel van deze aanpak is ook dat, als je iets uit de uitwerking niet begrijpt, je je docent(e) of medestudent(e) precies kunt 'aanwijzen' wat je niet snapt. Je kunt daarna waarschijnlijk weer zelf verder.

De voorbeelden uit het leerboek laten je zien hoe de aanpak van een vraagstuk, de oplossingsroute en de uitwerkingen eruitzien. Bekijk die voorbeelden dus goed en ga bij elke stap na of je begrijpt waarom juist die stap gezet wordt.
In het volgende schema staan de aanwijzingen voor het oplossen van vraagstukken nog eens in het kort bij elkaar.
Pak dit schema er overigens alleen bij als je een vraagstuk of berekening niet direct kunt oplossen. Als je door hebt hoe een vraagstuk moet worden aangepakt, ga dan gewoon je eigen weg.

Analyse (zelf doen)	**Oplossingsroute** (zelf doen)	**Uitwerking** (uitwerkingenboek, ter controle)	**Terugblik** (zelf doen)
• Bekijk goed wat er *gevraagd* wordt. • Onderzoek daarna grondig wat er *gegeven* is. • Welke formules en definities kun je gebruiken? • Heb je al eerder zoiets berekend en opgelost? • Heb je in de voorbeelden iets soortgelijks gezien? • Bedenk wat het antwoord ongeveer moet zijn (schatting, welk soort formule wordt gevraagd, enzovoort).	• Hoe kun je vanuit het gevraagde terugredeneren naar de gegevens? • Welke behandelde begrippen, definities en formules leggen verband tussen het gevraagde en de gegevens? • Waar wijkt dit vraagstuk af van de voorbeelden in het boek? Wat is er anders, waar moet je speciaal op letten? • Kom je er nu nog niet uit, kijk dan in het uitwerkingenboek.	• Als het verband tussen het gevraagde en de gegevens (bijna) duidelijk is, probeer dan een uitwerking op te schrijven. • Loop je toch vast, omdat een schakeltje ontbreekt of omdat je rekenfouten hebt gemaakt, kijk dan nog even in het uitwerkingenboek. • Ga daarna weer zelfstandig door.	• Bekijk jouw oplossing kritisch: - Klopt hij met de verwachtingen uit de analyse? - Klopt hij met de uitwerking in het uitwerkingenboek? - Waar ben je vastgelopen? - Waarom ben je vastgelopen? • Maak het vraagstuk nog een keer helemaal zelf. • Maak nog een vraagstuk van hetzelfde type en leg ergens vast dat je – voor het tentamen – nog een van dit type moet gaan maken.

Nog enkele tips:

1 Van een aantal vraagstukken uit het boek (meestal de wat grotere computeralgebravraagstukken) staat de uitwerking niet in dit uitwerkingenboek, maar zie je een verwijzing naar digitale bestanden op internet. Hier vind je tevens de meeste andere uitwerkingen van de computeralgebravraagstukken en ook die van de extra vraagstukken uit hoofdstuk 5.
De URL van de website is www.wiskundeho.wolters.

2 De meest gebruikte computeralgebrapakketten in het hbo zijn *Derive* en *Maple*. Het pakket *Mathematica* wordt in veel mindere mate gebruikt. De uitwerkingen van de computeralgebravraagstukken in dit boek en op de site zijn óf in *Derive* óf in *Maple* gegeven, en slechts een enkele keer in *Mathematica*. Als de uitwerking niet gegeven is in het pakket dat jij gebruikt, dan nog kun je veel aan die uitwerking hebben. Om te beginnen is het antwoord gegeven. Ook zal de oplossingsroute in jouw pakket niet veel anders zijn. De gebruikte syntax zal slechts hier en daar wat afwijken. De benodigde syntax is altijd terug te vinden via de Help-functie van je pakket.

Veel succes met je (wiskunde)studie!

Inhoud

Basiswiskunde

Als je loopt, loop dan;
als je zit, zit dan.
En zit vooral niet te wiebelen.
[Zen]

0

Leereenheid 0.1

Elementaire algebra

Opdracht

1 Inhoud cilindervormig blik met straal r en hoogte h is gelijk aan $\pi r^2 h$. Na de afname is de straal $(r - c)$ en de hoogte $(h - c)$. De nieuwe inhoud wordt dan: $\pi(r - c)^2(h - c)$.
Het verschil tussen oude en nieuwe inhoud bedraagt: $\pi r^2 h - \pi(r - c)^2(h - c)$.

0.1.1 Verzamelingen van getallen en het symbool ∞

Opdrachten

2 $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4\ldots\}$ en $\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, 4\ldots\}$
Het is dus *niet* zo, dat elk getal uit $\mathbb{N}$ ook in $\mathbb{Z}^+$ zit: het getal 0 zit wel in $\mathbb{N}$, maar niet in $\mathbb{Z}^+$.

3 De bewering is juist, ook gehele getallen zijn reële getallen.

4 De bewering is juist: getallen als 3, $\frac{5}{7}$ enzovoort, zitten zowel in $\mathbb{Q}^+$ als in $\mathbb{R}_0^+$.

5 Door [1] toe te passen op $\dfrac{a}{0} = p$ volgt $a = p \cdot 0$. Maar als $a \neq 0$ – en daar gaan we hier van uit – is er geen enkele p-waarde die aan $a = p \cdot 0$ voldoet.
Conclusie: $\dfrac{a}{0}\,(= p)$ is onmogelijk als $a \neq 0$.

6 Uit $\frac{0}{0} = p$ volgt met [1]: $0 = p \cdot 0$. Maar dit is *altijd* waar en zegt dus niets over p. $p = \frac{0}{0}$ is dus onbepaald.

Vraagstukken

0.1 a Juist.

b Juist.

c Onjuist: $\mathbb{R}^+$ samen met $\mathbb{R}^-$ *en het getal nul* is gelijk aan $\mathbb{R}$.

d Onjuist, zie eigenschap 3 en opdracht 6.

e $x^2 = -x \;\Rightarrow\; x^2 + x = 0 \;\Leftrightarrow\; x(x+1) = 0$; $x = 0$ of $x = -1$
De bewering is dus onjuist; de oplossing is $\{-1, 0\}$.

f Juist.

g Onjuist. Het domein is: $\langle \leftarrow, -3]$ samen met $[3, \rightarrow\rangle$.

h Onjuist. Het bedoelde bereik is $\mathbb{R}_0^+$.

i Juist.

j Onjuist. Het interval $\langle a, a\rangle$ is leeg; $[a, a]$ bevat alleen het getal a.

0.2 a De bewering is niet waar. Omdat de waarde van $x^2 + 1$ alleen maar toeneemt voor x in $[1, 4]$ is het bereik $[1^2 + 1, 4^2 + 1]$ ofwel $[2, 17]$.

b De bewering is waar. Omdat de waarde van $t^2 - 4$ steeds afneemt op $[-3, 0]$ en steeds weer toeneemt op $\langle 0, 4]$, splitsen we het domein op in twee deelintervallen $[-3, 0]$ en $\langle 0, 4]$. Op $[-3, 0]$ bereikt $s = t^2 - 4$ de waarden $-4 \leq s \leq 5$ en op $\langle 0, 4]$ de waarden $-4 < s \leq 12$. Het bereik is dus $[-4, 12]$.

c De bewering is niet waar. Het bereik van v is $[3, 9]$.

d De bewering is juist. Omdat $16 - q^2$ steeds toeneemt op $[-1, 0]$ en steeds afneemt op $\langle 0, 2]$, splitsen we het domein op in twee intervallen $[-1, 0]$ en $\langle 0, 2]$. Op $[-1, 0]$ is het bereik $[\sqrt{15}, \sqrt{16}]$ ofwel $[\sqrt{15}, 4]$ en op $\langle 0, 2]$ is het bereik $[\sqrt{12}, \sqrt{16}\rangle$ ofwel $[\sqrt{12}, 4\rangle$. Dus het bereik op het hele domein is $[\sqrt{12}, 4]$.

0.1.2 Merkwaardige producten, ontbinden in factoren

Opdracht

7 $(u + 8v)^2 =$ (regel 2) $u^2 + 2 \cdot u \cdot 8v + (8v)^2 = u^2 + 16uv + 64v^2$
$(k - 2l)\,(2l + k) = (k - 2l)\,(k + 2l) =$ (regel 1) $k^2 - (2l)^2 = k^2 - 4l^2$

Vraagstukken

0.3 a $x^2 - (2y)^2 = x^2 - 4y^2$

b $(3x)^2 - (2y)^2 = 9x^2 - 4y^2$

c Toepassing van regel 2 geeft:

$$\left(-\frac{1}{3}a^3\right)^2 + 2 \cdot \left(-\frac{1}{3}a^3\right) \cdot (-3) + (-3)^2 = \frac{1}{9}a^6 + 2a^3 + 9$$

d $-(x^4 - 4) = 4 - x^4$

e $p^4 - 1$

f $(a^2 + 3)(a^2 - 2) = a^2 \cdot a^2 + a^2 \cdot (-2) + 3 \cdot a^2 + 3 \cdot (-2) = a^4 + a^2 - 6$

g $4p^6 - 2p^5 + \frac{1}{4}p^4$

h $(a + b)^2 - 4c^2 = a^2 + 2ab + b^2 - 4c^2$

i $-(x^2y^2 - y^2)(x^2y^2 - y^2) = -(x^2y^2 - y^2)^2 = -(x^4y^4 - 2x^2y^4 + y^4)$
$= -x^4y^4 + 2x^2y^4 - y^4$

j Toepassing van regel 2 geeft:

$$\left(a - \frac{1}{2}b\right)\left(a + \frac{1}{2}b\right)\left(a^2 - \frac{1}{4}b^2\right) = \left(a^2 - \frac{1}{4}b^2\right)\left(a^2 - \frac{1}{4}b^2\right)$$
$$= \left(a^2 - \frac{1}{4}b^2\right)^2 = a^4 - \frac{1}{2}a^2b^2 + \frac{1}{16}b^4$$

0.4 a $am + an - pm - pn = a(m + n) - p(m + n) = (a - p)(m + n)$

b $x^2 - 3x + 2$. Dit is typisch een geval voor regel 5. We zoeken dus twee getallen (p en q) waarvan de som –3 en het product +2 is. Soms lukt het om twee zulke getallen te vinden, soms ook niet. (dan de *abc*-formule toepassen!). In dit geval lukt het: p en q zijn –1 respectievelijk –2.
Resultaat: $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$.

c $25p^2 - 49q^2 = (5p)^2 - (7q)^2$ {regel 1} $= (5p + 7q)(5p - 7q)$

d $s^2 - 10s + 25 = s^2 + 2 \cdot (-5) \cdot s + (-5)^2 =$ {regel 3} $= (s - 5)^2$

e $4s^2 - 20s + 25 = (2s)^2 + 2 \cdot 2s \cdot (-5) \cdot s + (-5)^2 =$ {regel 3} $= (2s - 5)^2$

f $x^4 - 3x^2 + 2 = (x^2)^2 - 3(x^2) + 2 =$ {zoek twee getallen met som gelijk aan –3 en product gelijk aan +2} $(x^2 - 1)(x^2 - 2) = (x + 1)(x - 1)(x^2 - 2)$.
Alternatief: vervang in $(x^2)^2 - 3(x^2) + 2$ de term (x^2) door p. We krijgen dan $p^2 - 3p + 2 = (p - 1)(p - 2)$, Vervang ten slotte p weer door x^2 en we vinden het eindresultaat.

g $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = (x - 1)^3$ {regel 7, met a=x en b=1}

h $9x^2 + 2 + \frac{1}{9x^2} = (3x)^2 + 2 + \left(\frac{1}{3x}\right)^2$

Het vereist wat oefening en ervaring om 2 te kunnen zien als $2 \cdot 3x \cdot \frac{1}{3x}$.

Pas nu regel 2 toe. Resultaat: $\left(3x + \frac{1}{3x}\right)^2$

i $\left(2p + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(2p + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)\left(2p + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) = (2p + 1) \cdot 2p$

j $\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)^2$ {regel 3}.

k $(3x + y)^2 - 3^2 = \{regel\ 1\}\ (3x + y + 3)\ (3x + y - 3)$

0.5 a $(a - c)^2 - (3c)^2 = (\text{regel } 1)\ \{(a - c) + 3c\} \cdot \{(a - c) - 3c\} = (a + 2c)\ (a - 4c)$.

b Juist.

0.6 a $(a^2 + 3)\ (a^2 - 3)$

b De machten van a, namelijk 8, 4 en 0 suggereren al dat het hier om een vorm in (a^4) gaat: $4(a^4)^2 - 12(a^4) + 9$.
Is regel 3 misschien toepasbaar? Zo ja, dan moeten we $4(a^4)^2$ lezen als $(2a^4)^2$ en 9 als $(-3)^2$. De middelste term $12a^4$ is dan het zogenoemde 'dubbele product' van $2a^4$ en -3. Dit klopt!
Dus $4(a^4)^2 - 12(a^4) + 9 = (2a^4)^2 + 2 \cdot (2a^4) \cdot (-3) + (-3)^2 = (2a^4 - 3)^2$.

c $(a^5 + b^5)\ (a^5 - b^5)$

d Direct valt op, dat er een factor a 'buiten haken' geplaatst kan worden:
$a^3 - ab^2 = a(a^2 - b^2)$ {regel 4}. Dan volgt met regel 1:
$a^3 - ab^2 = a(a + b)\ (a - b)$.

e $a^{11} - ab^{10} = a(a^{10} - b^{10}) = a(a^5 + b^5)\ (a^5 - b^5)$

f Dit vraagstuk is vergelijkbaar met **b**. Resultaat: $9a^8 - 15a^4 + 6{,}25 =$
$(3a^4) + 2 \cdot (3a^4) \cdot (-2{,}5) + (-2{,}5)^2 = (3a^4 - 2{,}5)^2$.

g $x^{2p} - 2x^p + 1 = (x^p)^2 - 2x^p + 1 = (x^p - 1)^2$

h $(a + b)^2 - (c + d)^2 = \{regel\ 1\}\ \{(a + b) + (c + d)\} \cdot \{(a + b) - (c + d)\}$
$= (a + b + c + d)\ (a + b - c - d)$

i Op 'het verschil van twee kwadraten' is regel 1 altijd toepasbaar!
Resultaat: $(3p^2 + 5p + 3)\ (-p^2 - p + 5)$

0.7 a $100{,}02 \cdot 99{,}98 = (100 + 0{,}02)\ (100 - 0{,}02) = 100^2 - (0{,}02)^2$
$= 10\,000 - 0{,}000\,4 = 9\,999{,}999\,6$

b $2\,500 - 4 = 2\,496$

c $0{,}04 - 0{,}000\,001 = 0{,}039\,999$

0.8 De toename bedraagt:
$(L + d)^3 - L^3 = L^3 + 3L^2d + 3Ld^2 + d^3 - L^3 = 3L^2d + 3Ld^2 + d^3$

0.9 a Het verschil kan met de theorie van merkwaardige producten herleid worden tot:
$2\pi rh + 2\pi r^2 - (2\pi(r - c)h + 2\pi(r - c)^2) =$
$2\pi rh + 2\pi r^2 - (2\pi rh - 2\pi ch + 2\pi(r^2 - 2rc + c^2)) =$
$2\pi rh + 2\pi r^2 - (2\pi rh - 2\pi ch + 2\pi r^2 - 4\pi rc + 2\pi c^2) =$
$2\pi rh + 2\pi r^2 - 2\pi rh + 2\pi ch - 2\pi r^2 + 4\pi rc - 2\pi c^2 = 2\pi ch + 4\pi rc - 2\pi c^2$

b $\pi r^2h - \pi(r-c)^2(h-c) = \pi r^2h - \pi(r^2-2rc+c^2)\ (h-c) =$
$\pi r^2h - \pi(hr^2-cr^2-2chr+2c^2r+c^2h-c^3) =$
$\pi hr^2 - \pi hr^2 + \pi cr^2 + 2\pi chr - 2\pi c^2r - \pi c^2h + \pi c^3 =$
$\pi c^3 - \pi c^2h - 2\pi c^2r + 2\pi chr + \pi cr^2$

0.1.3 Breuken, machten, staartdelingen, nogmaals ontbinden in factoren

Opdrachten

8 Dit lukt niet; je mag p nu *niet* wegstrepen.

9 De nieuwe, gezamenlijke, noemer wordt $(x-1)\ (x-2)$:

$$\begin{aligned} x + \frac{2}{x-1} - \frac{x}{x-2} &= \frac{x\,(x-1)\,(x-2)}{(x-1)\,(x-2)} + \frac{2(x-2)}{(x-1)\,(x-2)} - \frac{x(x-1)}{(x-1)\,(x-2)} \\ &= \frac{x(x-1)\,(x-2) + 2(x-2) - x(x-1)}{(x-1)\,(x-2)} \\ &= \frac{x^3-3x^2+2x+2x-4-x^2+x}{(x-1)\,(x-2)} \\ &= \frac{x^3-4x^2+5x-4}{(x-1)\,(x-2)} \end{aligned}$$

Vraagstuk

0.10 a $\dfrac{p^2a}{b}$

b $\dfrac{x}{y^3} + \dfrac{y}{y^3} - \dfrac{1}{y^2} = \dfrac{x}{y^3}$

c $\dfrac{2(a-1)}{(a+1)\,(a-1)} - \dfrac{2(a+1)}{(a+1)\,(a-1)} = \dfrac{-4}{a^2-1}\ \left(= \dfrac{4}{1-a^2}\right)$

d $\dfrac{2}{(a+1)\,(a-1)} - \dfrac{2(a+1)}{(a+1)\,(a-1)} = \dfrac{-2a}{a^2-1}\ \left(= \dfrac{2a}{1-a^2}\right)$

e $\dfrac{2(a^2+1) - 2(a^2-1)}{(a^2+1)\,(a^2-1)} = \dfrac{4}{a^4-1}$

f $\dfrac{x(x-1)}{x-1} - \dfrac{x}{x-1} = \dfrac{x^2-x-x}{x-1} = \dfrac{x(x-2)}{x-1}$

Opdrachten

10
$$\begin{array}{l} x-3\,/\,x^3+0\cdot x^2+0\cdot x-27\,\backslash\,x^2+3x+9 \\ \qquad\quad \underline{x^3-\ \ 3x^2}\ - \\ \qquad\qquad\quad 3x^2+0\cdot x \\ \qquad\qquad\quad \underline{3x^2-\ \ 9x}\ - \\ \qquad\qquad\qquad\quad 9x-27 \\ \qquad\qquad\qquad\quad \underline{9x-27}\ - \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\ \ 0 \end{array}$$

11 $f(x) = (x-1)\ (x+2)\ (x-3) = (x-1)\ (x^2-3x+2x-6) = (x-1)\ (x^2-x-6)$
$= x^3-x^2-6x-x^2+x+6 = x^3-2x^2-5x+6$

12 Door invullen van $x = 1$ zien we dat $x = 1$ een nulpunt is; $x - 1$ is dus een factor.

$$
\begin{array}{l}
x - 1 \diagup x^3 + 5x^2 - 13x + 7 \diagdown x^2 + 6x - 7 \\
\quad\quad x^3 - \;\; x^2 \\
\quad\quad \overline{} - \\
\quad\quad\quad\quad 6x^2 - 13x \\
\quad\quad\quad\quad 6x^2 - \;\; 6x \\
\quad\quad\quad\quad \overline{} - \\
\quad\quad\quad\quad\quad\quad -7x + 7 \\
\quad\quad\quad\quad\quad\quad -7x + 7 \\
\quad\quad\quad\quad\quad\quad \overline{} - \\
\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad 0
\end{array}
$$

Omdat $x^2 + 6x - 7 = (x - 1)\,(x + 7)$, is $x^3 + 5x^2 - 13x + 7 = (x - 1)^2(x + 7)$.

Vraagstukken **0.11** **a** $\dfrac{p^3a}{pb} = \dfrac{p^2a}{b}$

b $\dfrac{3a^2(b + c)^3}{12a(b + c)^4} = \dfrac{a}{4(b + c)}$

c $\dfrac{2}{p} + \dfrac{3}{q}$; de kgv$(p, q) = pq$, dus de nieuwe noemer van de breuken wordt pq.

$\dfrac{2}{p} + \dfrac{3}{q} = \dfrac{2q}{pq} + \dfrac{3p}{pq} = \dfrac{3p + 2q}{pq}$

d $\dfrac{x + y}{y^3} - \dfrac{1}{y^2}$; de kgv$(y^3, y^2) = y^3$, dus de nieuwe noemer wordt y^3.

$\dfrac{x + y}{y^3} - \dfrac{1}{y^2} = \dfrac{x + y}{y^3} - \dfrac{y}{y^3} = \dfrac{x}{y^3}$

e $\dfrac{2}{a + 1} - \dfrac{2}{a - 1} = \dfrac{2(a - 1)}{(a + 1)\,(a - 1)} - \dfrac{2(a + 1)}{(a + 1)\,(a - 1)} = \dfrac{2a - 2 - 2a - 2}{(a + 1)\,(a - 1)} =$

$\dfrac{-4}{(a + 1)\,(a - 1)} = \left(\dfrac{4}{(1 + a)\,(1 - a)} = \dfrac{4}{1 - a^2}\right)$

f $\dfrac{2}{a^2 - 1} - \dfrac{2}{a - 1}$ {eerst de noemer ontbinden!}

$= \dfrac{2}{(a + 1)\,(a - 1)} - \dfrac{2}{(a - 1)} = \dfrac{2 - 2(a + 1)}{(a + 1)\,(a - 1)} = \dfrac{-2a}{(a + 1)\,(a - 1)}$

$= \left(\dfrac{2a}{(1 + a)\,(1 - a)} = \dfrac{2a}{1 - a^2}\right)$

g $\dfrac{2}{a^2-1}-\dfrac{2}{a^2+1}$ {eerst de noemers, indien mogelijk, ontbinden}

$$\frac{2}{a^2-1}-\frac{2}{a^2+1}=\frac{2}{(a+1)\,(a-1)}-\frac{2}{a^2+1}$$

$$=\frac{2(a^2+1)}{(a+1)\,(a-1)\,(a^2+1)}-\frac{2(a+1)\,(a-1)}{(a+1)\,(a-1)\,(a^2+1)}=\frac{2a^2+2-2a^2+2}{(a+1)\,(a-1)\,(a^2+1)}$$

$$=\frac{4}{(a+1)\,(a-1)\,(a^2+1)}=\frac{4}{(a^2-1)\,(a^2+1)}=\frac{4}{a^4-1}$$

h $x-\dfrac{x}{x-1}=\dfrac{x}{1}-\dfrac{x}{x-1}=\dfrac{x(x-1)}{x-1}-\dfrac{x}{x-1}=\dfrac{x^2-2x}{x-1}=\dfrac{x(x-2)}{x-1}$

0.12 a $x^2-x-1\,/\,x^6+0\cdot x^5-3x^4+0\cdot x^3+2x^2+0\cdot x-6\,\backslash\,x^4+x^3-x^2+1$

$$\begin{array}{l}
x^6-x^5-x^4 \\
\hline
x^5-2x^4+0\cdot x^3 \\
x^5-x^4-x^3 \\
\hline
-x^4+x^3+2x^2 \\
-x^4+x^3+x^2 \\
\hline
x^2+0\cdot x-6 \\
x^2-x-1 \\
\hline
x-5
\end{array}$$

Dus: $\dfrac{x^6-3x^4+2x^2-6}{x^2-x-1}=x^4+x^3-x^2+1+\dfrac{x-5}{x^2-x-1}$

b $x+1\,/\,x^4\qquad -1\,\backslash\,x^3-x^2+x-1$

$$\begin{array}{l}
x^4+x^3 \\
\hline
-x^3 \\
-x^3-x^2 \\
\hline
x^2 \\
x^2+x \\
\hline
-x-1 \\
-x-1 \\
\hline
0
\end{array}$$

Dus: $\dfrac{x^4-1}{x+1}=x^3-x^2+x-1$

P.M. (Pro Memorie = ter herinnering): dit is in overeenstemming met $x^4-1=(x^2+1)\,(x^2-1)=(x^2+1)\,(x+1)\,(x-1)$, zodat:

$$\frac{x^4-1}{x+1}=(x^2+1)\,(x-1)=x^3-x^2+x-1.$$

0.13 **a** $\dfrac{2a}{a+b}+\dfrac{\frac{1}{2}a}{a-b}=\dfrac{2a(a-b)}{(a+b)\,(a-b)}+\dfrac{\frac{1}{2}a(a+b)}{(a+b)\,(a-b)}=\dfrac{2\frac{1}{2}a^2-1\frac{1}{2}ab}{(a+b)\,(a-b)}=\dfrac{a(2\frac{1}{2}a-1\frac{1}{2}b)}{(a+b)\,(a-b)}$

$\left(=\dfrac{a(5a-3b)}{2(a+b)\,(a-b)}\right)$

b $\dfrac{1}{p(p-1)}-\dfrac{2p}{(p-1)}=\dfrac{1}{p(p-1)}-\dfrac{2p\cdot p}{p(p-1)}=\dfrac{1-2p^2}{p(p-1)}$

c $\dfrac{1}{p(p-1)}-\dfrac{2p}{(p+1)\,(p-1)}=\dfrac{p+1}{p(p+1)\,(p-1)}-\dfrac{2p\cdot p}{p(p+1)\,(p-1)}=\dfrac{-2p^2+p+1}{p(p+1)\,(p-1)}$

d $\dfrac{p^3}{p-3}+\dfrac{27}{3-p}=\dfrac{p^3}{p-3}+\dfrac{-27}{p-3}=\dfrac{p^3-27}{p-3}$

We maken de volgende staartdeling:

$$
\begin{array}{l}
p-3\,/\,p^3+0\cdot p^2+0\cdot p-27\,\backslash\,p^2+3p+9\\
\quad\;\; \underline{p^3-\;\;3p^2}\;-\\
\quad\;\;\; +\;\; 3p^2+0\cdot p\\
\quad\quad\quad\;\; \underline{3p^2-\;\;9p}\;-\\
\quad\quad\quad\quad +\;\; 9p-27\\
\quad\quad\quad\quad\quad\;\; \underline{9p-27}\;-\\
\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad 0
\end{array}
$$

Dus het resultaat van de deling is: p^2+3p+9

e $\dfrac{1}{(a-b)\,(b-c)}-\dfrac{1}{(b-c)\,(c-a)}+\dfrac{1}{(a-c)\,(a-b)}$

$=\dfrac{1}{(a-b)\,(b-c)}+\dfrac{1}{(b-c)\,(a-c)}+\dfrac{1}{(a-c)\,(a-b)}$

$=\dfrac{a-c}{(a-b)\,(a-c)\,(b-c)}+\dfrac{a-b}{(a-b)\,(a-c)\,(b-c)}+\dfrac{b-c}{(a-b)\,(a-c)\,(b-c)}$

$=\dfrac{2a-2c}{(a-b)\,(a-c)\,(b-c)}=\dfrac{2(a-c)}{(a-b)\,(a-c)\,(b-c)}=\dfrac{2}{(a-b)\,(b-c)}$

f Voor het optellen/aftrekken van breuken bepaal je het kgv van de noemers. Dit lukt alleen als je de noemers ontbindt in factoren.

$\dfrac{1}{x^2-x}-\dfrac{x}{x^2-1}=\dfrac{1}{x(x-1)}-\dfrac{x}{(x+1)\,(x-1)}$.

Er geldt: kgv$(x(x-1),\ (x+1)(x-1))=x(x+1)(x-1)$. De verdere berekening verloopt als volgt:

$\dfrac{x+1}{x(x+1)\,(x-1)}-\dfrac{x\cdot x}{x(x+1)\,(x-1)}=\dfrac{-x^2+x+1}{x(x+1)\,(x-1)}$.

Deze breuk is niet verder te vereenvoudigen!

g Eerst teller en noemer ontbinden, daarna teller en noemer delen door gemeenschappelijke factoren van teller en noemer:

$$\frac{y^2-xy}{x^2-xy}\cdot\frac{x^2+xy}{y^2+xy}=\frac{y(y-x)}{x(x-y)}\cdot\frac{x(x+y)}{y(y+x)}=\frac{y\cdot-(x-y)}{x(x-y)}\cdot\frac{x(x+y)}{y(x+y)}=-1$$

h Eerst tellers en noemers ontbinden in factoren, daarna breuken vereenvoudigen en tot slot breuken optellen/aftrekken:

$$\frac{3a-9}{a^2+2a-15}-\frac{2a-8}{a^2-6a+8}+\frac{3a-7}{a^2+3a-10}$$
$$=\frac{3(a-3)}{(a+5)\,(a-3)}-\frac{2(a-4)}{(a-2)\,(a-4)}+\frac{3a-7}{(a+5)\,(a-2)}$$
$$=\frac{3}{a+5}-\frac{2}{a-2}+\frac{3a-7}{(a+5)\,(a-2)}$$
$$=\frac{3(a-2)}{(a+5)\,(a-2)}-\frac{2(a+5)}{(a+5)\,(a-2)}+\frac{3a-7}{(a+5)\,(a-2)}=\frac{4a-23}{(a+5)\,(a-2)}$$

i Vermenigvuldig eerst teller en noemer met a om de breuk in de teller en de noemer kwijt te raken (dit mag, want $a \neq 0$):

$$\frac{1-\dfrac{1-\frac{1}{a}}{a}}{1-\dfrac{1+\frac{1}{a}}{a}}=\frac{a\left(1-\dfrac{1-\dfrac{1}{a}}{a}\right)}{a\left(1-\dfrac{1+\dfrac{1}{a}}{a}\right)}=\frac{a-\left(1-\dfrac{1}{a}\right)}{a-\left(1+\dfrac{1}{a}\right)}=\frac{a-1+\dfrac{1}{a}}{a-1-\dfrac{1}{a}}$$

Vermenigvuldig nog een keer teller en noemer met a:

$$\frac{a\left(a-1+\dfrac{1}{a}\right)}{a\left(a-1-\dfrac{1}{a}\right)}=\frac{a^2-a+1}{a^2-a-1}\text{ met } a\neq 0$$

0.14 **a** $\dfrac{3p^3-4p^2q^2}{8p-3q^2}$

b -2

c $\dfrac{1}{\sqrt{b}}$

d $\dfrac{(a+\sqrt{b})^2}{a^2+b}$

0.15 a $\dfrac{x^4+4x^3-15x^2-34x-24}{x^2+x-12}=$

$$
\begin{array}{l}
x^2+x-12 \diagup x^4+4x^3-15x^2-34x-24 \diagdown x^2+3x-6 \\
\qquad\qquad\quad \underline{x^4+\ \ x^3-12x^2} \ - \\
\qquad\qquad\qquad\quad 3x^3-\ \ 3x^2-34x \\
\qquad\qquad\qquad\quad \underline{3x^3+\ \ 3x^2-36x} \ - \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad -\ 6x^2+\ \ 2x-24 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \underline{-\ 6x^2-\ \ 6x+72} \ - \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 8x-96
\end{array}
$$

Uitkomst: $x^2+3x-6+\dfrac{8x-96}{x^2+x-12}$

b $\dfrac{x^8-256}{x^2-4}=$

$$
\begin{array}{l}
x^2-4 \diagup x^8+0\cdot x^7+0\cdot x^6+0\cdot x^5+0\cdot x^4+0\cdot x^3+0\cdot x^2+0\cdot x-256 \diagdown x^6+4x^4+16x^2+64 \\
\qquad \underline{x^8 \qquad\quad -4x^6} \ - \\
\qquad\qquad\qquad 4x^6 \qquad +\ 0\cdot x^4 \\
\qquad\qquad\qquad \underline{4x^6 \qquad -\ \ 16x^4} \ - \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 16x^4 \qquad +\ 0\cdot x^2 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \underline{16x^4 \qquad -\ \ 64x^2} \ - \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 64x^2 \qquad -256 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \underline{64x^2 \qquad -256} \ - \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

Uitkomst: $x^6+4x^4+16x^2+64$

0.16 a We zien dat $x=-1$ voldoet; we vinden na staartdelen:
$2x^3+5x^2-3=(x+1)\,(2x^2+3x-3)$

b $(x-1)\,(x+5)^2$

c Hier zoeken we waarschijnlijk wat langer naar $x=2$ als nulpunt; na een staartdeling volgt: $(x-2)\,(x-3)\,(x-4)$

0.1.4 Gebroken vergelijkingen

Vraagstukken

0.17 a We beginnen met op te merken, dat $x\neq-\frac{1}{3}$ moet zijn in verband met de noemer $3x+1$. Daarna brengen we alles onder één noemer $(3x+1)$ en stellen de teller gelijk aan 0: $3x-1+3x+1=0 \;\Rightarrow\; 6x=0 \;\Rightarrow\; x=0$
Pas achteraf zien we, dat de opmerking $x\neq\frac{1}{3}$ overbodig is.

b $x\neq 2$; $x^2+x-2-(1-x)=0 \;\Leftrightarrow\; x^2+2x-3=0 \;\Leftrightarrow\; (x-1)\,(x+3)=0$
Conclusie: $x=1$ of $x=-3$

c $x \neq 1$; $x \neq -2$. Omdat $x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$ kunnen we schrijven:

$$\frac{x+1}{x-1} - \frac{1}{x-1} - \frac{x+4}{x+2} = 0 \text{ of:}$$

$$\frac{x}{x-1} - \frac{x+4}{x+2} = 0 \Rightarrow x(x+2) - (x+4)(x-1) = 0$$

Oplossing: $x = 4$

d $x \neq -4$; $x^2 - 16 = 0 \Rightarrow x_1 = 4$ of $x_2 = -4$, maar $x_2 = -4$ voldoet niet.
Oplossing: $x = 4$

e $x \neq -1$. Voor het linkerlid schrijven we: $\dfrac{(x+4)(x+1)}{(x+1)^2}$, wat gelijk is aan $\dfrac{x+4}{x+1}$, en dit is identiek aan het rechterlid.

Oplossing: alle x in $\mathbb{R}$, behalve $x = -1$.

0.18 a $x \neq 1$ en $x \neq 2$. De vergelijking is te herleiden tot $3x^2 - 9x + 8 = 0$. Deze heeft geen (reële) oplossingen.

b $x = 0$ of $x = 1$.

c $x = \frac{5}{3}$

d We proberen een staartdeling en deze blijkt op te gaan. Dit levert: $2x - 3 = 0$, zodat $x = \frac{3}{2}$; deze oplossing voldoet.

e Alle x in $\mathbb{R}$, maar $x \neq \frac{2}{3}$ en $x \neq 2$.

0.19 a $\dfrac{b}{a} = 1 - \dfrac{c}{a} \Rightarrow \dfrac{b}{a} = \dfrac{a-c}{a}$, $b = a - c$, zodat $a = b + c$, met $a \neq 0$

b $a\left(\dfrac{1}{b} + 1\right) = \dfrac{b}{c} \Rightarrow a = \dfrac{b}{c\left(\dfrac{1}{b} + 1\right)} = \dfrac{b^2}{c(1+b)}$, $b \neq 0$, $b \neq -1$ en $c \neq 0$

c $a \neq b$ en $a \neq e$

$$\frac{a-b}{c} = \frac{a-e}{d} \Rightarrow a\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{d}\right) = \frac{-e}{d} + \frac{b}{c} \Rightarrow a\left(\frac{d-c}{cd}\right) = \frac{-ec+bd}{dc} \Rightarrow a = \frac{bd-ec}{d-c}$$

d $a \neq 0$ en $b \neq 0$ en $c \neq 0$. $a = -\dfrac{bc}{b+c}$

e $b \neq 0$ en $c \neq 0$ en $d \neq 0$. $a = -\dfrac{b^2d + bc^2}{cd}$

f $(u - \frac{1}{2}v^2)m(a-1) = ap \Rightarrow -m(u - \frac{1}{2}v^2) = a\{p - m(u - \frac{1}{2}v^2)\}$ dus:

$$a = \frac{m(u - \frac{1}{2}v^2)}{m(u - \frac{1}{2}v^2) - p} \text{ of } a = \frac{m(2u - v^2)}{m(2u - v^2) - 2p} \quad (a \neq 1)$$

0.1.5 Oneigenlijke machten

Vraagstukken

0.20 **a** $(p^2q^{-3})^4 = \{\text{rekenregel } 6\}\ p^{2\cdot 4}\cdot q^{-3\cdot 4} = p^8q^{-12}$

b $(v^2w^{-3})^{-1}\cdot w^{-2} = \{\text{rekenregel } 6\}\ v^{2\cdot(-1)}w^{-3\cdot(-1)}\cdot w^{-2} = v^{-2}\cdot w^3\cdot w^{-2} =$
$\{\text{rekenregel } 4\} = v^{-2}w$

c $\dfrac{r^3s^{-4}}{r^{-2}s^5} = \{\text{rekenregel } 5\}\ r^5\cdot s^{-9} = \{\text{definitie } 2\}\ \dfrac{r^5}{s^9}$

d $\dfrac{(ab^2)^3a^{-5}b}{a^4b^6} = \{\text{rekenregel } 6\}\ \dfrac{a^3b^6\cdot a^{-5}b}{a^4b^6} = \{\text{rekenregel } 4\}\ \dfrac{a^{-2}b^7}{a^4b^6}$

$= \{\text{rekenregel } 5\}\ a^{-6}b = \{\text{definitie } 2\}\ \dfrac{b}{a^6}$

e $(a^{-1}b^{-2}c^{-3})^{-1}\cdot(a^{-3}b^{-2}c^{-3})^2 = a^1b^2c^3\cdot a^{-6}b^{-4}c^{-6} = a^{-5}b^{-2}c^{-3} = \dfrac{1}{a^5b^2c^3}$

f $$\frac{2\cdot 2^{-4}\cdot 4\cdot(2^{-2})\cdot\dfrac{1}{2}}{2^2\cdot(2^{-3}\cdot 2^2)^{-2}} = \frac{2^1\cdot 2^{-4}\cdot 2^2\cdot 2^{-2}\cdot 2^{-1}}{2^2\cdot 2^6\cdot 2^{-4}} = \frac{2^{-4}}{2^4} = \frac{1}{2^8} = \frac{1}{256}$$

g $$\frac{(-2^2x^{-2}y^{-3})\cdot(x^{-1}y^0)^{-1}}{(xy^2z^0)^{-2}} = \frac{-2^2x^{-2}y^{-3}\cdot x^1\cdot 1}{x^{-2}y^{-4}\cdot 1} = -4xy$$

0.21 **a** $a^{\frac{4}{3}}$

b $a^{\frac{4}{3}}$

c $a^{\frac{7}{3}}$

d $a^{\frac{5}{3}}$

e $x^{\frac{3}{4}}$

f $\dfrac{b^{\frac{2}{15}}}{b^{\frac{1}{3}}\cdot b^{\frac{3}{5}}} = b^{\frac{2}{15}-\frac{1}{3}-\frac{3}{5}} = b^{\frac{2}{15}-\frac{5}{15}-\frac{9}{15}} = b^{-\frac{4}{5}}$

0.22 $2^{x-1} - 2\cdot 2^x + 2^2\cdot 2^{x+1} = 2^x(\frac{1}{2} - 2 + 8) = \frac{13}{2}\cdot 2^x$
Resultaten:

a $\frac{13}{2}$

b 13

c 26
(x invullen en daarna uitrekenen mag ook.)

0.23 $x = 2$, want $3\cdot 2^{-2} - \frac{3}{4} = 0$

0.24 **a** $(\sqrt{3})^{x-1} = \frac{1}{3} \Rightarrow 3^{\frac{x-1}{2}} = 3^{-1} \Rightarrow \dfrac{x-1}{2} = -1 \Rightarrow x = -1$

b $2^{x+\frac{3}{2}} = 2^{-2(2-x)} \Rightarrow x + \frac{3}{2} = -4 + 2x \Rightarrow x = \frac{11}{2}$

0.25 **a** $\sqrt[3]{\dfrac{8x^6y^{-3}}{27(xy^2z^0)^{-3}}} = \sqrt[3]{\dfrac{8x^6(xy^2\cdot 1)^3y^{-3}}{27}} = \dfrac{2x^2\cdot xy^2\cdot y^{-1}}{3} = \frac{2}{3}x^3y$

b $\sqrt[5]{\left(\dfrac{a^2\cdot\sqrt[3]{b^2}}{b^2\cdot\sqrt[4]{c^3}}\right)^6} = \sqrt[5]{\dfrac{a^{12}b^4}{b^{12}c^{\frac{9}{2}}}} = a^{\frac{12}{5}}\cdot b^{-\frac{8}{5}}\cdot c^{-\frac{9}{10}}$

0.26 **a** $10^{-1}\cdot 10^{-10} = 10^{-11}$

b $10^{-2}\cdot 10^6 = 10^4$

0.27 $\sqrt{8}+\sqrt{18}=\sqrt{50}$; kwadrateren geeft: $(\sqrt{8})^2 + 2\cdot\sqrt{8}\cdot\sqrt{18} + (\sqrt{18})^2 = 50$ of $2\cdot\sqrt{8}\sqrt{18} = 24$; nogmaals kwadrateren geeft $4\cdot 8\cdot 18 = 24^2$. En dit is waar, dus is ook het voorgaande waar.

0.1.6 Vierkantsvergelijkingen

Opdracht **13** $3x^2+14x-5=0$. Met de *abc*-formule vinden we

$$x_{1,2} = \frac{-14\pm\sqrt{14^2-4\cdot 3\cdot(-5)}}{2\cdot 3} = \frac{-14\pm\sqrt{256}}{6}.$$

$$x_1 = \frac{-14+16}{6} = \frac{1}{3} \text{ en } x_1 = \frac{-14-16}{6} = -5$$

Vraagstukken **0.28** **a** $x_{1,2} = \dfrac{-(-7)\pm\sqrt{(-7)^2-4\cdot 1\cdot 12}}{2\cdot 1}$, dus $x_1 = 4$ en $x_2 = 3$.

In dit – eenvoudige – geval hadden we x_1 en x_2 ook zonder de *abc*-formule kunnen vinden, immers: $x^2-7x+12=(x-3)(x-4)$

b $x_{1,2} = \dfrac{7\pm\sqrt{49-48}}{4}$, dus $x_1 = 2$ en $x_2 = \frac{3}{2}$.

c $x_{1,2} = \dfrac{-\frac{5}{2}\pm\sqrt{\frac{25}{4}+6}}{3}$, dus $x_1 = \frac{1}{3}$ en $x_2 = -2$.

d $x_1 = \frac{8}{9}$ en $x_2 = \frac{8}{9}$.

0.29 **a** $(x-3)(x-4)$

b $2(x-\frac{3}{2})(x-2)$

c $\frac{3}{2}(x-\frac{1}{3})(x+2)$

d $72(x-\frac{9}{8})(x-\frac{8}{9})$

0.30 **a** $(2x-1)^2 = 2x-1$, dus $(2x-1)\cdot(2x-1) = (2x-1)\cdot 1$; $x_1 = \frac{1}{2}$ en $x_2 = 1$.

b $x_1 = a\sqrt{5}$ en $x_2 = -a\sqrt{5}$.

c $x_1 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ en $x_2 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$.

d $x_1 = +\sqrt{\frac{5}{2}}$ en $x_2 = -\sqrt{\frac{5}{2}}$.

0.31 **a** $(x+2)(x-3) = 0$ of $x^2 - x - 6 = 0$

b $x = 3$ is een oplossing, dus ingevuld geeft dat: $9 - 3p = 6 \;\Rightarrow\; p = 1$;
$x^2 - x - 6 = 0 \;\Leftrightarrow\; (x-3)(x+2) = 0$
Dus $x = -2$ is de tweede oplossing.

c $9x^2 + mx + 1 = 0$
Oplossingen: $x_{1,2} = \dfrac{-m \pm \sqrt{m^2-36}}{18}$, maar uit $x_1 = x_2$ volgt: $\sqrt{m^2-36} = 0$,
zodat $m_1 = 6$ en $m_2 = -6$.
Met $m = 6$ volgt: $9x^2 + 6x + 1 = (3x+1)^2$, met $x_{1,2} = -\frac{1}{3}$
Met $m = -6$ volgt: $9x^2 - 6x + 1 = (3x-1)^2$, met $x_{1,2} = +\frac{1}{3}$

0.32 Vul $y = k - x$ in, in $x^2 + y^2 = 25$ en stel $D = 0$. We vinden dan: $k_1 = +5\sqrt{2}$ en $k_2 = -5\sqrt{2}$

0.33 Uit $D = 0$ volgt: $a = 2$; $x_{1,2} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

0.34 We beginnen de berekening met $x + y = 5$ en $xy = -24$ en vullen $y = 5 - x$ in, in $xy = 24$.
De getallen zijn: $x = -3$ en $y = 8$.

Toets leereenheid 0.1

1 De volumetoename is: $\frac{4}{3}\pi\{(r+p)^3 - r^3\} = \frac{4}{3}\pi\{3r^2p + 3rp^2 + p^3\}$

2 $a^4 - 5a^2 + 4 = (a^2-1)(a^2-4) = (a-1)(a+1)(a-2)(a+2)$

3 $x^3 - 7x + 6 = (x-1)(x-2)(x+3)$

4 $x_1 = 2$ en $x_2 = \frac{1}{7}$

5 $a = \dfrac{3bd + 8gc}{d - 4c}$

6 $a^{-4} \cdot b^{-\frac{28}{9}} \cdot c$

7 $x = -\frac{13}{3}$

8 **a** $x_1 = +\frac{1}{2}$ en $x_2 = -\frac{1}{7}$.

b $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 2\sqrt{5}$ en $x_4 = -2\sqrt{5}$.

9 $a_1 = (-1 + \sqrt{2})c$ en $a_2 = (-1 - \sqrt{2})c$.

(Met de *abc*-formule; de *x* uit de *abc*-formule is hier *a* en de *b* komt overeen met $2c$.)

10 $v = 10 \cdot (\frac{4}{3}R)^{\frac{10}{21}}$

11 De gevraagde waarde van *n* is 105. In bijvoorbeeld *Maple* vinden we met `factor(x^105-1);` dat een van de factoren een coëfficiënt –2 bevat.