Th.M. van Pelt
R.B.J. Pijlgroms
J.L. Walter

Wiskunde

voor het hoger onderwijs

Deel 0

Noordhoff Uitgevers

Vierde druk

Wiskunde voor het hoger onderwijs 0

Wiskunde voor het hoger onderwijs 0

Th.M. van Pelt

R.B.J. Pijlgroms

J.L. Walter

Vierde druk

Noordhoff Uitgevers Groningen | Houten

Ontwerp omslag: G2K-designers
Omslagillustratie: Photodisc
Foto's binnenwerk: ANP, p. 175, 194

Eventuele op- en aanmerkingen over deze of andere uitgaven kunt u richten aan:
Noordhoff Uitgevers bv, Afdeling Hoger Onderwijs, Antwoordnummer 13,
9700 VB Groningen, e-mail: info@noordhoff.nl

5 6 7 8 9 / 14 13 12 11 10

ISBN (e-book) 978 90 01 83837 9
ISBN 978 90 01 03338 5
NUR 123

Aan de student – Waarom dit boek?

Een goed begin is het
halve werk; volhouden is
de andere helft.

De schrijvers verwachten met dit boek de aansluiting op de wiskunde van jouw vooropleiding en jouw persoonlijke leerstijl goed te laten verlopen.

Als je aan de toelatingsvoorwaarde van jouw hbo-studie voldoet, bezit je ook een voldoende hoeveelheid kennis, inzicht en vaardigheden voor het vak wiskunde. Het blijkt echter dat de mate van de geoefendheid in wiskunde soms onvoldoende is en dat enkele wiskundige onderwerpen, die in het hbo van belang zijn, zijn weggezakt bij de aanvang van je hbo-studie. Die moeten dus worden opgefrist. Iedere opleiding zal daarbij een passende keuze uit de leereenheden van dit boek kunnen maken.

Het is ook mogelijk dat je nog niet aan de toelatingsvoorwaarden voldoet door de keuze van een havo- of vwo-profiel dat geen toelatingsrecht geeft of omdat je, als mbo-er, niet in het bezit bent van de hbo-doorstroomdeelkwalificatie. In beginsel vind je in dit boek alles wat nodig is om je voor een hbo-studie te kwalificeren. Dit geldt ook voor de groep studenten die al lange tijd uit het onderwijs is en een vervolgstudie aanpakt.

Ten slotte kan het zijn dat je een student bent die zich, in de tweede fase van het Voortgezet Onderwijs of in het mbo, oriënteert op een hbo-studie. Wij vinden dat dit boek zich goed leent om als oriëntatie op vervolgstudies te gebruiken, omdat het boek je een goed beeld geeft van wat je in verschillende hbo-opleidingen nodig hebt.

Vanwege het feit dat dit boek voor verschillende doelgroepen is geschreven en mensen verschillende leerstijlen hebben, is gekozen voor een opzet waarbij een leereenheid op diverse manieren gebruikt kan worden. In de studiewijzer vind je daarvoor de nodige aanwijzingen, zodat je een maximaal rendement uit dit boek kan halen.

Om de genoemde doelgroepen goed op de hbo-studie voor te bereiden, zijn er in hoofdstuk 3 twee leereenheden toegevoegd waarvan de inhoud niet in deze vorm op het havo en het mbo aan de orde komt. Het gaat om de onderwerpen Limieten en Integraalrekening, die in alle hbo-opleidingen met wiskundeonderwijs van belang zijn. Deze twee onderwerpen laten ook zien waarom de eerste twee hoofdstukken van dit boek zo belangrijk zijn voor je verdere studie.

Het boek kan zeker ook dienen als naslagwerk. De meesten van jullie hebben de wiskundeboeken uit de vooropleiding van de hand gedaan. Geen nood: alle benodigde voorkennis staat in dit boek.

Om je een beeld te geven van de ‘ontdekkers’ en/of de eerste gebruikers van de wiskunde uit dit boek, geven wij achtergrondinformatie over de belangrijkste hoofdrolspelers uit de wiskunde. Je zult zien dat veel wiskunde bedacht is door ‘gewone’ mannen en vrouwen die erop uit waren om onplezierig rekenwerk te vermijden, om nauwkeuriger te kunnen werken en wetmatigheden te kunnen verklaren. Ook dát zijn motieven geweest om dit boek voor jullie te schrijven.

Voorjaar, 2005
De auteurs

Studiewijzer

Een mens onthoudt:
10% van wat hij hoort
20% van wat hij ziet
80% van wat hij doet

Dit wiskundeboek voor het hoger beroepsonderwijs is voor hbo-studenten met verschillende vooropleidingen geschreven. Ook leerlingen uit het havo of het mbo die zich oriënteren op een hbo-studie zullen het gebruiken. Dat betekent dat er op verschillende manieren met het boek gewerkt moet kunnen worden. Hierna lees je hoe dat zou kunnen. We geven nu eerst even de opbouw van het boek en de indeling van de paragrafen aan.

Het boek heeft drie hoofdstukken. Ieder hoofdstuk bestaat uit een aantal leereenheden waarvoor, afhankelijk van je voorkennis, gemiddeld 10 klokuren (SBU's = studiebelastingsuren) nodig zijn. De leereenheden zijn onderverdeeld in paragrafen. Schematisch zien de hoofdstukken er als volgt uit.

Hoofdstuk 1
Leereenheid 1.1 met diagnostische toets
    paragraaf 1.1.1
        paragraaf 1.1.2
            paragraaf 1.1.3
                paragraaf 1.1.4
                    toets leereenheid 1.1
Leereenheid 1.2
Leereenheid 1.3
Leereenheid 1.4 met diagnostische toets
    paragraaf 1.4.1
        paragraaf 1.4.2
            paragraaf 1.4.3
                toets leereenheid 1.4
Leereenheid 1.5

De leereenheden beginnen met een korte inleiding, gevolgd door een oriëntatie die bestaat uit een Diagnostische toets die aangeeft wat je moet kunnen en kennen na bestudering van de leereenheid, en een Praktijksituatie. Dan volgen de paragrafen van de leereenheid. Om dit boek op verschillende wijzen te kunnen gebruiken, is gekozen voor de volgende opzet van de paragrafen:

- *inleiding*;
- *uitleg* van theorie met voorbeelden en opdrachten die aansluiten op de voorkennis en die de theorie inleiden;
- *samenvatting*: hier staat nogmaals de theorie die uit de voorbeelden naar voren komt;
- *vraagstukken*: als oefening en verdieping in de stof.

Waar nodig worden in een paragraaf de onderdelen uitleg met voorbeelden en opdrachten, samenvatting en vraagstukken – meestal in deze volgorde – herhaald.
Deze indeling is bewust niet genummerd; je kunt op verschillende wijzen door een paragraaf gaan, afhankelijk van jouw voorkennis en van jouw persoonlijke leerstijl. Heb je in je vooropleiding ten minste wiskunde B1 gedaan of heb je de hbo-doorstroomdeelkwalificatie in het mto gevolgd, dan is het handig om de oriënterende vraagstukken in de diagnostische toets aan het begin van de leereenheid te gebruiken om na te gaan of je de stof voldoende beheerst. Met je leraar kun je afspreken wanneer je voor jouw studierichting de stof ‘voldoende beheerst’. Als blijkt dat er nogal wat manco’s zijn, dan begin je aan de eerste paragraaf van de leereenheid.
Het ligt voor de hand dat je dan eerst de theorie in de samenvattingen leest. Komt je dat allemaal bekend voor (denk daarbij aan de oriënterende vraagstukken die je moeilijk vond), dan kun je de voorbeelden bestuderen en de opdrachten maken. De bestudering wordt afgesloten met de vraagstukken aan het einde van de paragraaf. Komt de theorie je niet bekend voor, begin dan met de voorbeelden en de opdrachten die vóór de betreffende samenvatting staan. Daarna komen de voorbeelden en opdrachten ná de samenvatting en ten slotte de vraagstukken die de paragraaf afsluiten. Als je niet voor een *theoretische insteek* kiest, dan kun je misschien beter eerst de voorbeelden bekijken, om te weten waar de draad uit de vooropleiding en de voorkennis wordt opgepakt. Als dat je geruststelt en helpt bij de studie, doe dat dan, maar vergeet niet de theorie in de samenvattingen te bestuderen. Misschien ben je een *doener*, die direct met de vraagstukken aan het einde van de paragraaf wil beginnen. Ook prima, maar als het niet lukt deze juist te beantwoorden, kijk dan goed naar de voorbeelden en de theorie in de samenvattingen.
Studenten die nog niet eerder met de stof hebben gewerkt, zouden in ieder geval toch even naar de oriënterende vraagstukken kunnen kijken, om te zien wat er gaat gebeuren in de leereenheid. De ervaring leert dat, ook al begrijp je niet veel van die vraagstukken, er toch al herkenningspunten zijn uit je voorkennis en dat door het doorlezen toch dingen blijven hangen die verderop in de paragraaf wat houvast geven. Na een blik op de oriënterende vraagstukken zijn dan de voorbeelden of meteen de theorie aan de beurt, afhankelijk van je leerstijl.

Alles wat jouw leraar aan begeleiding in de les of in de zelfwerkuren aan informatie over de voorbeelden, opdrachten en theorie geeft, is van groot belang en kan je helpen om in een hoog tempo de voorgeschreven leereenheden door te werken. Vraag vooral veel aan je leraar. Houd daarnaast voor jezelf één van de hier aangegeven routes aan die je het beste ligt.

Veel succes met de start van je studie en veel plezier met de wiskunde.

Verklaring van de margetekens

geschat aantal studiebelastingsuren

Koppeling vooropleiding aan leerstof

Als een opleiding de leerstof van een leereenheid als vereiste voorkennis heeft benoemd, dan mag in beginsel aangenomen worden dat, afhankelijk van de vooropleiding van de student, de onderstaande bestuderingswijze van die leerstof noodzakelijk is. Verschillen in voorkennis en vaardigheden tussen studenten met eenzelfde vooropleiding kunnen echter groot zijn. Het is daarom altijd lonend om de diagnostische toets aan het begin van de leereenheid te maken om te voorkomen dat een student ten onrechte de leereenheid gaat bestuderen of ten onrechte overslaat.
In het volgende schema kun je zien wat, naar verwachting, de nog te bestuderen stof is, afhankelijk van je vooropleiding.

Betekenis van de arcering

	bestuderen niet nodig
arcering	opfrissen
arcering	grondig herhalen
arcering	grondig bestuderen

Vooropleiding	***N&T (havo)***	***N&G (havo)***	***E&M, C&M (havo)***	***MTO met hbo-doorstroom***	***MTO zonder hbo-doorstroom***
Hoofdstuk 1 Basisvaardigheden					
1.1 Ontbinden en vergelijken	opfrissen	grondig herhalen	grondig bestuderen	opfrissen	grondig bestuderen
1.2 Breuken bewerken	opfrissen	grondig herhalen	grondig bestuderen	opfrissen	grondig bestuderen
1.3 Machten nemen	opfrissen	grondig herhalen	grondig bestuderen	opfrissen	grondig bestuderen
1.4 Werken met logaritmen	grondig bestuderen	grondig bestuderen	grondig bestuderen	grondig bestuderen	grondig bestuderen
1.5 Rekenen met goniometrische verhoudingen	opfrissen	grondig herhalen	grondig bestuderen	opfrissen	grondig bestuderen
Hoofdstuk 2 Functies					
2.1 Lineaire functies					grondig bestuderen
2.2 Kwadratische functies					grondig bestuderen
2.3 Gebroken lineaire functies	grondig bestuderen	grondig bestuderen	grondig bestuderen	grondig bestuderen	grondig bestuderen
2.4 Wortelfuncties	opfrissen	grondig herhalen	grondig bestuderen	opfrissen	grondig bestuderen
2.5 Goniometrische functies	grondig herhalen	grondig bestuderen	grondig bestuderen	grondig bestuderen	grondig bestuderen
2.6 Exponentiële functies	opfrissen	grondig herhalen	grondig bestuderen	opfrissen	grondig bestuderen
2.7 Logaritmische functies	grondig bestuderen	grondig bestuderen	grondig bestuderen	grondig bestuderen	grondig bestuderen
Hoofdstuk 3 Veranderen					
3.1 *Grenswaarden bepalen*	grondig bestuderen	grondig bestuderen	grondig bestuderen	grondig bestuderen	grondig bestuderen
3.2 Veranderen	opfrissen	grondig bestuderen	grondig bestuderen	opfrissen	grondig bestuderen
3.3 *Sommeren*	grondig bestuderen	grondig bestuderen	grondig bestuderen	grondig bestuderen	grondig bestuderen

NB 3.1 en 3.3 is geen leerstof uit de vooropleiding.

Aan de docent – Woord vooraf bij de vierde druk

Het beste wiskundeboek is het
nog ongeschreven boek
van de docent zelf.

Omgaan met verschillen

Voor u ligt de vierde druk van deel 0 van de serie Wiskunde voor het Hoger Onderwijs. De twee belangrijkste motieven waardoor de auteurs zich hebben laten leiden om dit deel te herzien zijn:

1 De instroom van het hbo wordt nog steeds meer divers.
2 Gebruikservaringen blijven leren dat verschillen in leerstijlen en voorkennis van studenten vragen om studiemateriaal dat op verschillende wijzen gebruikt kan worden.

Vergeleken met de vorige druk is de didactische opzet echter iets vereenvoudigd. De diverse onderdelen van de leereenheden zijn nu consequent gemerkt met de kopjes:

- uitleg
- voorbeelden
- samenvatting
- vraagstukken,

waar nodig in meer dan één cyclus met deze volgorde.

Het bewust rekening houden met verschillen tussen leerlingen lijkt onontkoombaar. Voor technische opleidingen zullen havo-leerlingen met een profiel Natuur en Gezondheid en met een profiel Natuur en Techniek toelaatbaar zijn. Voor mto-leerlingen geldt dat zij op verschillende wijze een hbo-doorstroomkwalificatie kunnen behalen. En er zijn zelfs mto-leerlingen die geen doorstroomkwalificatie gevolgd of behaald hebben. Ten slotte zullen herstarters in het hoger onderwijs (opnieuw) een zekere startkwalificatie moeten bereiken. In de delen 1 en 2 van de methode werken we met afgebakende leereenheden, met als doel duidelijke en logische stofafbakening voor verschillende gebruikers. Dat gebeurt ook in deel 0. Daarnaast willen we inspelen op de verschillende leerstijlen van leerlingen, door de leerling in iedere paragraaf zijn/haar leerproces te laten starten vanuit de theorie, of vanuit de voorbeelden, of vanuit de vraagstukken, of vanuit een verdiepende reflectie (samenvatting), afhankelijk van wat Kolb de 'leerstijl' van een persoon noemt. Het is goed om leerlingen erop te wijzen dat, na hun favoriete startfase van het leren, de gehele cyclus van voorbeeld-theorie-toepassen-reflectie (samenvatten) moet worden doorlopen en worden herhaald, om echt overzicht over de stof te krijgen.
Verder stelt de beschreven indeling van de paragrafen leerlingen, die de stof alleen maar behoeven op te frissen of grondig te herhalen, in staat om snel de manco's in beeld te krijgen en er efficiënt mee aan de slag te gaan. In de studiewijzer staat een aantal studeeraanwijzingen vermeld die ook voor de docent als coach van het leerproces van belang zijn.

Belangrijk voor de docent is nog om vast te stellen wanneer een leerling erbij gebaat is om een leereenheid te gaan bestuderen. De oriënterende ingangstoets (diagnostische toets) kan daarbij ondersteuning bieden.
De docent kan, afhankelijk van de scores op die toets, bepalen wanneer het voor een student van belang is om de betreffende leereenheid te gaan bestuderen. Aansluitend zal de docent aan kunnen geven bij welke scores op de eindtoets de student op voldoende niveau is gekomen.

In deze druk wordt niet meer verwezen naar computeralgebra (CA).
Waar dat relevant en nuttig is wordt wel gebruikgemaakt van een spreadsheetpakket, zoals bijvoorbeeld Excel.

In deze druk is gestreefd naar een nog betere aansluiting door het opnemen van sterk vereenvoudigde opgaven in de leereenheden van hoofdstuk 1.

Wij hopen met dit deel een handreiking te bieden aan de docent die als begeleider van leerprocessen met een gedifferentieerde instroom van leerlingen aan de slag wil.

Voorjaar 2005
De auteurs

Over de auteurs

Theo van Pelt studeerde MO-wiskunde aan de Katholieke Leergangen te Tilburg. Hij heeft negen jaar wiskunde gegeven in het voortgezet onderwijs. Thans is hij verbonden aan de Avans Hogeschool als docent wiskunde, statistiek, informatica en bedrijfseconomie. Tevens is hij tot 2001 als onderwijskundig medewerker werkzaam geweest bij verschillende opleidingen van de AVANS Hogeschool.

Rom Pijlgroms beëindigde na de HTS-Elektrotechniek (1961) zijn studie Theoretische Natuurkunde aan de Universiteit van Amsterdam met een promotie over relativistische golfvergelijkingen (1980). Sinds 1966 is hij als docent verbonden aan – wat nu heet – het Instituut Informatica van de Hogeschool van Amsterdam. Hij doceerde onder meer wiskunde, statistiek, informatica, intelligente systemen en fuzzy logic.

Jan Walter studeerde toegepaste wiskunde aan de Universiteit Twente.
Na zijn studie werd hij docent wiskunde en informatica aan de HTS te Hengelo (die inmiddels is opgegaan in de Saxion Hogeschool in Enschede). Momenteel is hij als docent wiskunde en als opleidingscoördinator Vastgoed & Makelaardij verbonden aan de Academie Ruimtelijke Ontwikkeling en Bouw van de Saxion Hogescholen.

Inhoud

Hoofdstuk 2
Functies *117*

Basisvaardigheden

Wiskunde is als een fundament voor een gebouw: het komt het eerst, het is onmisbaar en het valt alleen op als het niet sterk genoeg is.

1

Verantwoording van dit hoofdstuk

In de opleidingen in het hoger beroepsonderwijs waarin wiskunde wordt toegepast, komen in die toepassingen een aantal basisbegrippen en basishandelingen voor. In dit hoofdstuk zijn die begrippen en vaardigheden bij elkaar gezet, die in bijna alle studierichtingen voorkomen maar die ook vaak als lastig worden ervaren. Ter illustratie geven we de verbeterde Wet van Boyle: de zogenoemde Van Der Waals-vergelijking voor de toestand van een gas, met druk p, volume V en de temperatuur T. Voor zo'n gas geldt:

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT.$$

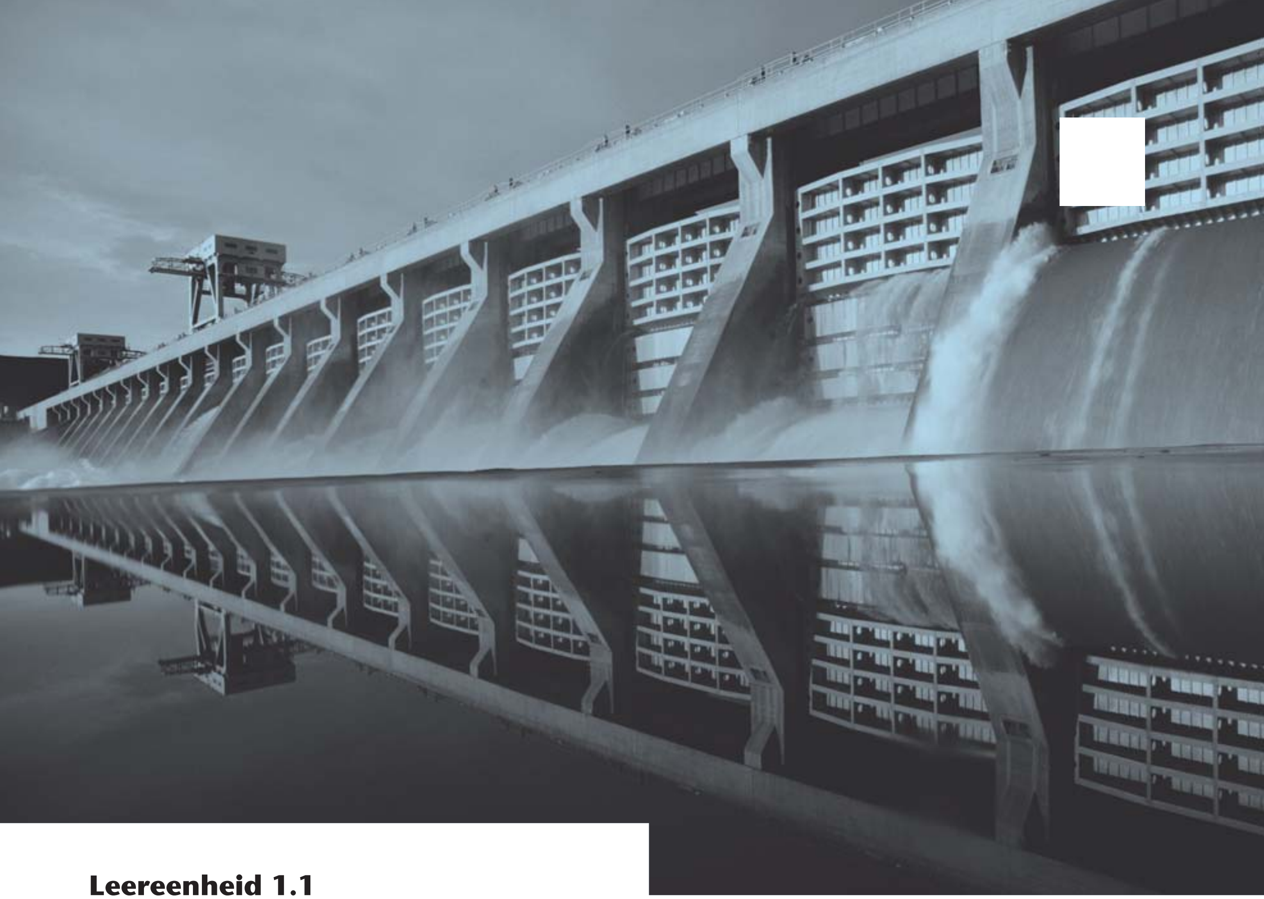
Als je moet uitvinden hoe groot V is, uitgedrukt in p, T, a en b, dan heb je nogal wat algebra-vaardigheden nodig.
Een ander voorbeeld is de plaats aan de hemel van de zon op 12 uur 's middags op dag t van het jaar. Dat blijkt gegeven te worden door de uitdrukking:

$-23{,}4^\circ \cos\left(\frac{360}{365{,}25}(t + 10)\right)$. Om zoiets te kunnen lezen heb je al wat elementaire goniometrische kennis nodig.

Geen van de onderwerpen in dit hoofdstuk is geheel nieuw: alle onderwerpen, met uitzondering van enkele goniometrische toepassingen, komen voor in het Wiskunde B1-programma van het havo en in de hbo-doorstroom-deelkwalificatie in het mto. Soms blijkt echter dat het zelfvertrouwen en de mate van geoefenheid in die onderwerpen te wensen overlaat. Daarom ga je er, indien nodig, in dit hoofdstuk op in.

Afhankelijk van je vooropleiding en je leerstijl zul je, in overleg met je docent, een route door het hoofdstuk kunnen maken. *Let daarbij vooral op de studeeraanwijzingen die in de studiewijzer zijn genoemd voor diegene die alleen hun kennis willen opfrissen of diegene die de onderwerpen voor het eerst bestuderen.*
Voor grondige bestudering van de vijf leereenheden uit dit hoofdstuk zijn ongeveer 50 studiebelastingsuren noodzakelijk.
Je vindt in dit hoofdstuk alle benodigde theoretische achtergronden en vraagstukken met voldoende diepgang voor je hbo-opleiding.
Met name dit hoofdstuk kan ook als naslagwerk in je hbo-opleiding goed van pas komen.
Als voorkennis wordt uitgegaan van de intervalnotaties, het werken met negatieve getallen, het begrip reëel getal, de begrippen spiegeling, het oplossen van lineaire vergelijkingen en inhoud- en oppervlakte-formules.

Wiskunde is als een fundament voor een gebouw.



Leereenheid 1.1

Ontbinden en vergelijken

Het geschatte aantal SBU's bedraagt 10.

In veel berekeningen worden *merkwaardige producten* en het *ontbinden in factoren* toegepast. Merkwaardige producten ofwel 'het verdrijven van de haakjes' en ontbinden in factoren ofwel 'het binnen haakjes plaatsen' zijn vaak onmisbaar voor het overzichtelijk houden en het vereenvoudigen van een berekening.
Naast deze onderwerpen komen ook twee van de vele toepassingen aan de orde: *vierkantsvergelijkingen en de abc-formule* en *stelsels lineaire vergelijkingen*.
Om deze leereenheid te kunnen uitvoeren, moet je eenvoudig hoofdrekenwerk, het rekenen met letters, eenvoudige rekenregels voor het vermenigvuldigen van machten en wortels beheersen en moet je de rekenregels voor het oplossen van vergelijkingen kennen.

Diagnostische toets

1 Bereken met behulp van merkwaardige producten:

a $(6-\sqrt{3})\,(6+\sqrt{3})$

b $\sqrt{5}(2+\sqrt{10}-3\sqrt{2})$

c $(4\sqrt{x}-\sqrt{3})^2$

d $-2(pq-3)^2$

e $(x+2)(x-2)(x^2+4)$

f $(t^2+3)(2t^2-4)$

2 Ontbind zo ver mogelijk in factoren:

a $s^2-4s-21$

b $t^2-9t^4+20t^3$

c p^4-25q^2

d $-2ac-bc+2ad+bd$

3 Aan de muur hangt een kunstwerk van 2,5 bij 2,5 meter. Om dit kunstwerk komt een houten lijst van 5 cm breed en 5 cm dik.

a Toon aan dat de hoeveelheid m^3 hout die je nodig hebt voor de lijst gelijk is aan $((2{,}6)^2-(2{,}5)^2)\cdot 0{,}05\ m^3$. Bereken vervolgens dit merkwaardige product.

b Je besluit in de lijst een groef te maken van 3 cm diep en 3 cm breed, aan de binnenkant, langs het kunstwerk. Je brengt de groef aan met een frees. Toon aan dat de hoeveelheid m^3 hout uit de groef gelijk is aan $((2{,}56)^2-(2{,}5)^2)\cdot 0{,}03 m^3$. Bereken vervolgens dit merkwaardige product.

4 Los de volgende vergelijking op:

a $p^2-4p-21=0$

b $10t^2+t-3=0$

c $4a^2-20a+25=0$

d $3x^4+36x^3+10^5x^2=0$

e $5b^2-10b+12=0$

f $5t^2=35t$

g $c^2-4\frac{1}{2}c=2\frac{1}{2}$

5 Toon aan dat de *vkv* $x^2+6kx+9k^2=0$ altijd precies één oplossing heeft.

6 Van twee getallen is het verschil gelijk aan 16. Hun product is gelijk aan 1025. Bereken beide getallen.

7 In een gezin zijn de moeder en de zoon samen 71 jaar oud. Vorig jaar was de moeder twee keer zo oud als de zoon toen was. Hoe oud zijn de moeder en de zoon?

8 Een studente heeft geld op drie verschillende bankrekeningen staan. De bedragen staan uit tegen respectievelijk 3%, 4,5 en 5% rente per jaar. Aan het einde van het jaar zal ze totaal aan rente €428 ontvangen. Het totale bedrag dat ze op de banken heeft staan bedraagt €9.540. Het grootste bedrag staat tegen het hoogste rentepercentage uit en is het 0,8 deel van de som van de beide andere bedragen.
Welke bedragen heeft ze op de drie verschillende banken staan?

9 Los de volgende stelsels vergelijkingen op:

a $\begin{cases} 15x-7y=159 \\ x=2y+29 \end{cases}$

b $\begin{cases} 2x-5y+2z=21 \\ -x+2y-3z=-16 \\ 3x-7y-4z=10 \end{cases}$

10 Gegeven het stelsel vergelijkingen: $\begin{cases} 2\frac{1}{2}x-\ \ 3y=4 \\ -12y+10x=6 \end{cases}$

Welk van de volgende antwoorden in juist?

a Voorgaand stelsel heeft als oplossing $x=4$ en $y=2$.

b Voorgaand stelsel is strijdig.

c Voorgaand stelsel is identiek.

11 Gegeven de vkv $8x^2 - 6x - 9 = 0$. Welk van de volgende antwoorden is juist?

a De vkv heeft precies twee verschillende reële oplossingen.
b De vkv heeft precies twee dezelfde reële oplossingen.
c De vkv heeft geen reële oplossingen.

Praktijksituatie

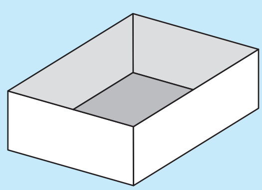
In een werkplaats worden van vierkante aluminiumplaatjes van 20 bij 20 cm bakjes gemaakt met een vierkant grondvlak. Ze hebben geen deksel. Hierbij wordt de eis gesteld dat de bakjes een zo groot mogelijke inhoud hebben. Welke afmetingen moeten de bakjes hebben? Om dit probleem op te lossen, wordt eerst gezocht naar een uitdrukking voor het volume V. Hiertoe zullen we ons in deze praktijksituatie beperken.

In figuur 1.1a zie je zo'n bakje weergegeven. Eerst wordt een schematische weergave van de werkelijkheid gemaakt als hulp bij de aanpak van het probleem.

1 De maten van het bakje zijn niet bekend; we noemen daarom de hoogte h en de lengte, die gelijk is aan de breedte, l, zie figuur 1.1b.

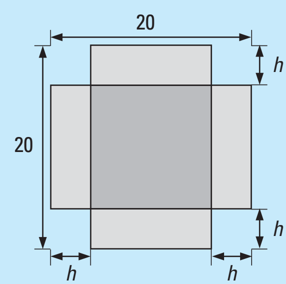
Figuur 1.1a

Het bakje in werkelijkheid



Figuur 1.1b

In uitgeklapte weergave



2 De uitdrukking voor de inhoud V (lengte · breedte · hoogte) luidt nu:

$$\begin{aligned} V &= (20 - 2h) \cdot (20 - 2h) \cdot h \\ &= (400 - 80h + 4h^2) \cdot h \\ &= 4h^3 - 80h^2 + 400h = V(h), \text{ met de randvoorwaarde } 0 < h < 10. \end{aligned}$$

1.1.1 Merkwaardige producten

UITLEG

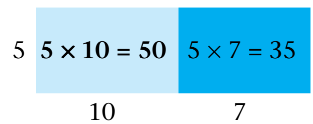
In onderstaande voorbeelden en opdrachten komen rekenregels aan de orde met betrekking tot het wegwerken van haakjes bij vermenigvuldigen. Hieruit is de theorie van deze rekenregels af te leiden.

- Zoals je weet is een *product* een vermenigvuldiging, waarvan de onderdelen *factoren* heten. Zo bestaat het product $5ab = 5 \cdot a \cdot b$ uit de factoren 5, a en b. Het product $4 \cdot (x + y)$ bestaat uit de factoren 4 en $(x + y)$.

Bij de vermenigvuldiging $4 \cdot (8 + 5)$ rekenen we eerst de optelling tussen de haakjes uit, uitkomst 13, en vervolgens $4 \cdot 13$ met als resultaat 52. De vermenigvuldiging $4 \cdot (x + y)$ zou je ook zo moeten aanpakken. Maar helaas, zolang je niet weet wat de waarden van x en y zijn, kun je de optelling $x + y$ niet uitrekenen. Die andere manier wordt hierna uitgelegd.

- Een eigenaar van een bedrijf koopt voor zijn kantoorpersoneel vijf zwarte inktpatronen voor printers die elk €17 kosten. Bij het uitrekenen van het totale bedrag, $5 \cdot €17$, maakt hij zich de volgende voorstelling:

  de oppervlakte van een rechthoek van 5 bij 17, onderverdeeld in twee rechthoeken van 5 bij 10 respectievelijk 5 bij 7. De totale oppervlakte is dan $5 \cdot 10 + 5 \cdot 7 = 85$. Wiskundig wordt voorgaande situatie als volgt genoteerd en berekend:

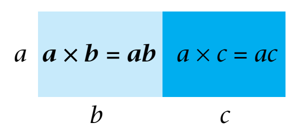
  $5 \cdot 17 = 5 \cdot (10 + 7) = 5 \cdot 10 + 5 \cdot 7 = 85$. De pijlen geven aan hoe je de haakjes wegwerkt.

Voor elk drietal willekeurige getallen a, b en c geldt:

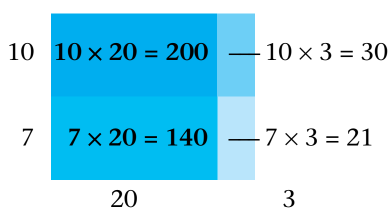
Rekenregel

1 $\boldsymbol{a \cdot (b + c) = ab + ac}$

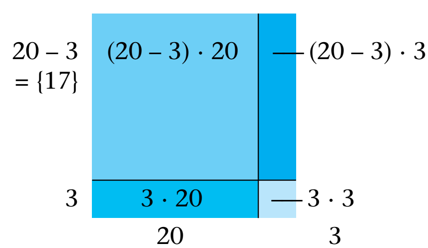
Je kunt je de berekening weer voorstellen met behulp van oppervlakten van rechthoeken.



- De eigenaar van het bedrijf koopt bovendien 17 kleur inktpatronen,elk tegen een prijs van €23. Voor het berekenen van het eindbedrag maakt hij de volgende voorstelling:



òf



Je kunt de vermenigvuldiging $17 \cdot 23$ voorstellen door de oppervlakte van een rechthoek van 17 bij 23, die weer onderverdeeld is in vier rechthoeken van respectievelijk 10 bij 20, 10 bij 3, 7 bij 20 en 7 bij 3 (linkse figuur). De totale oppervlakte van de rechthoek is gelijk aan
$10 \cdot 20 + 10 \cdot 3 + 7 \cdot 20 + 7 \cdot 3 = 391$.

Hetzelfde resultaat krijgen we door de situatie als volgt te noteren en uit te rekenen:

$17 \cdot 23 = (10 + 7) \cdot (20 + 3) = 10 \cdot 20 + 10 \cdot 3 + 7 \cdot 20 + 7 \cdot 3 = 391.$

De pijlen geven weer aan hoe je de haakjes wegwerkt.

Òf de vermenigvuldiging kan voorgesteld worden door een rechthoek van 20 bij 23, die onderverdeeld is in vier rechthoeken van respectievelijk (20 – 3) bij 20, (20 – 3) bij 3, 3 bij 20 en 3 bij 3 (rechtse figuur). Deze situatie wordt als volgt genoteerd en berekend:

$17 \cdot 23 = 20 \cdot 20 + 20 \cdot 3 - 3 \cdot 20 - 3 \cdot 3 = 400 + 60 - 60 - 9 = 391$
Dit resultaat krijgen we door de situatie als volgt te noteren en uit te rekenen:
$17 \cdot 23 = (20 - 3) \cdot (20 + 3) = (20 - 3) \cdot 20 + (20 - 3) \cdot 3 =$

$20 \cdot 20 - 3 \cdot 20 + 20 \cdot 3 - 3 \cdot 3 = 400 - 60 + 60 - 9 = 391.$
De pijlen geven weer aan hoe de berekening zou kunnen verlopen.

Voor elk viertal willekeurige getallen a, b, c en d geldt:

Rekenregel **2** $\boldsymbol{(a + b) \cdot (c + d) = ac + ad + bc + db}$

a	$a \times c = ac$	$a \times d = ad$
b	$b \times c = bc$	$b \times d = bd$
	c	d

Een derde hulpmiddel om haakjes te verdrijven is de matrix. Als je bijvoorbeeld $(2x + 3) \cdot (x - 4)$ moet uitrekenen, plaats dan de elementen in de eerste rij en de eerste kolom van een matrix. Vermenigvuldig vervolgens de elementen van de rij met de bijbehorende elementen van de kolom en zet de uitkomst van de vermenigvuldiging in de bijbehorende matrixcel.

X	$2x$	$+3$
x	$2x \cdot x = 2x^2$	$3 \cdot x = 3x$
-4	$2x \cdot (-4) = -8x$	$3 \cdot (-4) = -12$

Dus $(2x + 3) \cdot (x - 4) = 2x^2 + 3x - 8x - 12 = 2x^2 - 5x - 12$.

Opdracht **1** Pas bovenstaande regels toe op de volgende opdrachten. Maak eventueel gebruik van de voorstelling van een rechthoek.

a $(a + p)(a + q) = \ldots + \ldots + \ldots + \ldots = a^2 + (p + q)a + pq$

b $(a + b)(a - b) = \ldots - \ldots + \ldots - \ldots = \ldots - \ldots$

c $(a + b)^2 = \ldots + \ldots + \ldots + \ldots = a^2 + \ldots + b^2$

d $(a - b)^2 = \ldots - \ldots - \ldots + \ldots = \ldots - \ldots + \ldots$

Term
Factor

Alvorens een samenvatting van de rekenregels in algemene notaties te geven, worden twee begrippen, *term* en *factor*, uit deze samenvatting verduidelijkt. Een *term* is een element van een optelling of aftrekking. Een *factor* is een element van een vermenigvuldiging.

Uit bovenstaande voorbeelden en opdrachten zijn de volgende rekenregels af te leiden.

Rekenregels buiten haakjes werken

SAMENVATTING

$$3\quad \underbrace{a\,(b+c+d)}_{\substack{\text{getal maal som}\\ \text{van een veelterm}}} = \underbrace{ab+ac+ad}_{\substack{\text{de som van de producten}\\ \text{van dat getal met alle termen}}}$$

$$4\quad \underbrace{(a+b)(c+d)}_{\substack{\text{de som van de twee}\\ \text{termen maal de som van}\\ \text{twee andere termen}}} = \underbrace{ac+ad+bc+bd}_{\substack{\text{de som van de producten van}\\ \text{de elementen van de ene tweeterm}\\ \text{met die van de andere tweeterm}}}$$

$$5\quad \underbrace{(a+p)(a+q)}_{\substack{\text{de som van twee termen}\\ a \text{ en } p \text{ maal de som van}\\ \text{de twee termen } a \text{ en } q}} = \underbrace{a^2}_{\substack{\text{het kwadraat van}\\ \text{de gemeen-}\\ \text{schappelijke term } a}} + \underbrace{(p+q)a}_{\substack{\text{de som van } p \text{ en } q\\ \text{maal de gemeen-}\\ \text{schappelijke term } a}} + \underbrace{pq}_{\substack{\text{het product}\\ \text{van } p \text{ en } q}}$$

$$6\quad \underbrace{(a+b)(a-b)}_{\substack{\text{som van twee termen}\\ \text{maal het verschil van die}\\ \text{twee termen}}} = \underbrace{a^2}_{\substack{\text{kwadraat van}\\ \text{eerste term}}} - \underbrace{b^2}_{\substack{\text{kwadraat van}\\ \text{tweede term}}}$$

$$7\quad \underbrace{(a+b)^2}_{\substack{\text{kwadraat van}\\ \text{de som van } a \text{ en } b}} = \underbrace{a^2}_{\substack{\text{kwadraat}\\ \text{eerste term}}} + \underbrace{2ab}_{\substack{\text{dubbele product}\\ \text{beide termen}}} + \underbrace{b^2}_{\substack{\text{kwadraat}\\ \text{tweede term}}}$$

$$8\quad \underbrace{(a-b)^2}_{\substack{\text{kwadraat van}\\ \text{het verschil}\\ \text{van } a \text{ en } b}} = \underbrace{a^2}_{\substack{\text{kwadraat}\\ \text{eerste term}}} - \underbrace{2ab}_{\substack{\text{dubbele product}\\ \text{beide termen}}} + \underbrace{b^2}_{\substack{\text{kwadraat}\\ \text{tweede term}}}$$

Merkwaardige producten

Opmerking
De uitdrukkingen uit 6, 7 en 8 heten merkwaardige producten.

Opdrachten

2 Controleer de volgende uitwerkingen.

a $(x+4)(x-6) = \{\text{rekenregel 5}\}\ x^2+(4-6)x+4\cdot(-6) = x^2-2x-24$

b $(2x-y)(2x+y) = \{\text{rekenregel 6}\}\ (2x)^2-y^2 = 4x^2-y^2$

c $(2x+3y)^2 = \{\text{rekenregel 7}\}\ (2x)^2+2(2x)(3y)+(3y)^2 = 4x^2+12xy+9y^2$

d $(2x-3y)^2 = \{\text{rekenregel 8}\}\ (2x)^2-2(2x)(3y)+(3y)^2 = 4x^2-12xy+9y^2$

e $(3a-2b)(2b+3a) = (3a-2b)(3a+2b) = \{\text{rekenregel 6}\}\ 9a^2-4b^2$

3 Werk de haakjes weg bij de volgende vermenigvuldigingen.

a $2p^2(3p^3+4)$

b $(2t-3)(2t-5)$

c $(3q^2+2p)(3q^2-2p)$

d $(s^2+5t)^2$

e $(2p+5q)(-5q+2p)$

4 Schrijf zonder haakjes.

a $3(p + 6)$
b $4(3a - 2)$
c $b(b - 4)$
d $6(4 + 7x)$
e $16(-2h - 4)$
f $3e(4 - e)$
g $-(x - 5)$
h $-5(3c + 4)$
i $-s(-s - 5)$
j $-(8 - 4m)$

5 Schrijf zonder haakjes.

a $5(p^4 + 8p^2)$
b $7a^2(5a^3 - 4)$
c $p^3(p^2 - 8p)$
d $9x(2 + 8x^2)$
e $15h^4(-4h^2 - 9)$
f $7e^2(5e - 3e^5)$
g $-x(x^3 - 7x)$
h $-8c^2(5c^4 + 3c^2)$
i $w - w^3(-w - 9w^2)$
j $-n^4(7 - 3n^5)$

6 Schrijf zonder haakjes.

a $(n - 7)(n + 3)$
b $(p + 2)(p - 9)$
c $(x - \frac{1}{2})(x + 5)$
d $(7 - s)(s + 5)$
e $(g - 7)(g + 7)$
f $(v - 7)(3 + v)$
g $(b + 8)(b + 11)$
h $(3 + 4a)(a + 2)$
i $(x + 9)^2$
j $(t - 4)^2$
k $(7 - g)^2$
l $(-p - 7)^2$
m $(a + 11)^2$
o $(-3 - 4h)^2$

VRAAGSTUKKEN

1.1 Bereken met behulp van de gegeven rekenregels.

a $(3 + \sqrt{5})(\sqrt{7} - 2)$
b $(2p + 1)^2$
c $(a^4 + 1)(a^4 - 1)$
d $(-3a^2 - \frac{1}{3})^2$
e $(3x + y)(3x - y)$
f $-(x - 2)(2 - x)$
g $-(a^4 - 2)^2$
h $(p - 2q)(p + 2q)(p^2 - 4q^2)$
i $(a + 7)(a + 8)$
j $(7 + 2\sqrt{6})^2$

1.2 Bereken met behulp van de gegeven rekenregels.

a $(x + 2)(x - 2)$
b $-(x^2 - \frac{1}{2}x)^2$
c $-(b^2 - ab)(b^2 + ab)$
d $\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)^2$
e $\left(\frac{1}{2} + \frac{x}{y}\right)^2$
f $-b(x + y + z)$
g $(a - b)(x + y + z)$

1.3 In een productiebedrijf maakt men aluminium cilinders die van onder en van boven gesloten zijn. De kostprijs van aluminium per 100 cm^2 bedraagt €0,85. De oppervlakte van de cilinder wordt bepaald met de formule $\pi d \cdot \left(h + \frac{1}{2}d\right)$, waarbij d de diameter is van onder- en bovenkant van de cilinder en h de hoogte.
Als $h = 0{,}75$ m en $d = 0{,}25$ m, bereken dan de kosten van één aluminium cilinder.

Klapschaats met aluminium buis. Ook in de sportwereld wordt veel aluminium toegepast. Bij fietsen en schaatsen moet het materiaal bijvoorbeeld zo licht en sterk mogelijk zijn.

1.4 Een gezin bestaat uit twee kinderen. Het oudste kind is drie keer zo oud als het jongste kind. Dat jongste kind is vier jaar later geboren dan het oudste kind.

a Als x de leeftijd is van het oudste kind en y de leeftijd van het jongste kind, toon dan aan dat voorgaande situatie uitgedrukt kan worden in $x = 3 \cdot (x - 4)$.

b Werk in deze uitdrukking de haakjes weg.

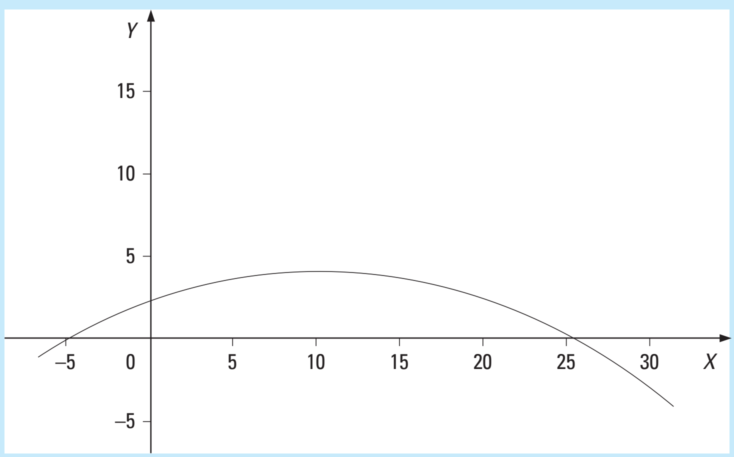
c Ga na, door het resultaat van *b* verder uit te werken, dat $x = 6$ de oplossing is van deze uitdrukking.

1.1.2 Ontbinden in factoren

Het omgekeerde van haakjes verdrijven is het ontbinden in factoren, een techniek die onder andere vaak wordt toegepast bij het oplossen van vergelijkingen en het vereenvoudigen van breuken. We kunnen de rekenregels 3 tot en met 8 van de vorige paragraaf daarbij opnieuw gebruiken, maar nu van rechts naar links gelezen.

In paragraaf 1.1.1 wordt gebruikgemaakt van het 'verdrijven van de haakjes'. In onderstaande situatie wordt het 'binnen haakjes plaatsen' toegepast.

Figuur 1.2 **De baan van een tennisbal**



Een tennisbal wordt vanaf 2,2 m hoogte onder een bepaalde hoek met het horizontale vlak en met een bepaalde beginsnelheid weggeslagen. De baan van de bal is te beschrijven volgens de vergelijking $y = 0{,}0176 \cdot (-x^2 + 20x + 125)$, zie figuur 1.2. De afstand die de tennisbal heeft afgelegd op het moment dat deze de grond raakt, is te berekenen door de vergelijking $0{,}0176 \cdot (-x^2 + 20x + 125) = 0$ op te lossen. De oplossing verloopt verder als volgt:

$(x^2 - 20x - 125) = 0$

$(x + 5) \cdot (x - 25) = 0$ Het linkerdeel van de vergelijking is ontbonden in factoren.

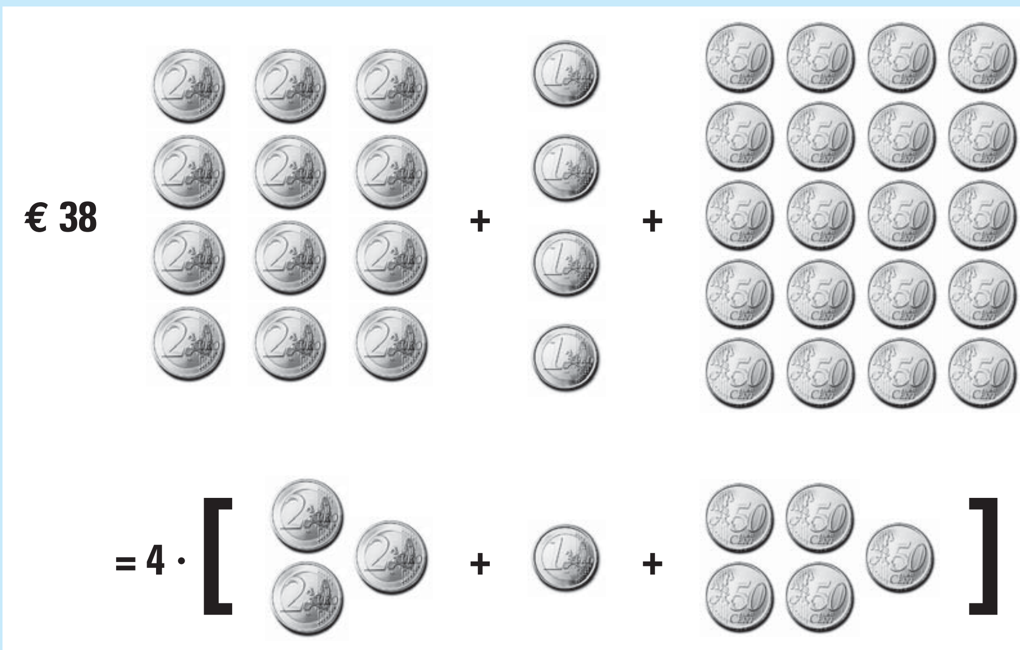
$x = -5$ of $x = 25$

$x = -5$ voldoet niet. De tennisbal komt na 25 meter op de grond.

Een groep van vier kinderen heeft met Driekoningen een bedrag van €38 opgehaald: vier munten van €1, twintig munten van €0,50 en twaalf munten van €2.
Ze willen dit bedrag in vier gelijke delen verdelen met in elk deel per soort munt een gelijk aantal. Hoe ziet die verdeling eruit?

De twaalf munten van €2 zijn over de vier kinderen gelijkelijk te verdelen. Elk kind ontvangt drie munten van €2. Van de 4 munten van €1 ontvangt elk kind een munt van €1 en van de twintig munten van €0,50 krijgt elk kind vijf munten van €0,50, zie figuur 1.3.

Figuur 1.3 **Ontbinden in factoren**



Dus $12 \cdot €2 + 4 \cdot €1 + 20 \cdot €0{,}50$ is te schrijven als $4 \cdot (3 \cdot €2 + 1 \cdot €1 + 5 \cdot €0{,}50)$. Dit heet ontbinden in factoren. In ons geval is $12 \cdot €2 + 4 \cdot €1 + 20 \cdot €0{,}50$ te ontbinden in 4 factoren van $(3 \cdot €2 + 1 \cdot €1 + 5 \cdot €0{,}50)$. Korter opgeschreven:
$12 \cdot €2 + 4 \cdot €1 + 20 \cdot €0{,}50 = 4 \cdot (3 \cdot €2 + 1 \cdot €1 + 5 \cdot €0{,}50)$. De haakjesvorm bestaat uit 3 factoren van €2, 1 factor van €1 en 5 factoren van €0,50. Deze drie factoren 3, 1 en 5 hebben geen gemeenschappelijke factor meer.

Definitie

Ontbinden in factoren is het schrijven van een uitdrukking als een product (vermenigvuldiging) met factoren ongelijk 1.

Bij de standaard ontbindingen spreekt men van een 'echte' ontbinding, indien de termen van de haakjesvorm geen gemeenschappelijke factoren hebben.

Voorts geldt min of meer bij afspraak, dat er in de haakjesvorm geen breuken voorkomen.
Goed beschouwd komt het ontbinden van factoren in deze vorm neer op het zoeken van de grootste gemeenschappelijke factor. Van de verschillende geldstukken €2, €1 en €0,50 zijn de aantallen respectievelijk 12, 4 en 20. Het aantal 12 valt uiteen in de factoren $2^2 \cdot 3$, het aantal 4 is te schrijven als 2^2 en 20 kan herschreven worden als $2^2 \cdot 5$. De gemeenschappelijke factor (ggf) is dus 2^2 en deze factor is tevens de grootste. Kort genoteerd ggf(12, 4, 20) = 4.

In de wiskunde wordt gewerkt met getalsymbolen a, b, c, x, y, z enzovoort. Voorgaand voorbeeld leidt dan tot de eerste rekenregel met betrekking tot het buiten haakjes werken of het ontbinden in factoren:
voor elke waarde van $a \neq 0$, b, c en d geldt $ab + ac + ad = a \cdot (b + c + d)$, zie blz. 9.

UITLEG

In de volgende voorbeelden komen regels aan de orde die betrekking hebben op het ontbinden in factoren ofwel het 'het plaatsen van haakjes'.
De voorbeelden zijn van dien aard dat de theorie over deze regels eruit af te leiden is.

1 ggf(60, 90) = 30, want $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$, $90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$; van 2^2 en 2 is de gemeenschappelijke factor 2, van 3 en 3^2 is de gemeenschappelijke factor 3 en van 5 en 5 is dit natuurlijk 5; de grootste gemeenschappelijke factor is dan $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$
ggf(20, 60) = 20; $20 = 2^2 \cdot 5$ en $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$
ggf(300, 360) = 60; $300 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$ en $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$
$\text{ggf}(a^2b^3c, ab^2c^3) = ab^2c$
$\text{ggf}(x^4y^2z^5, x^2y^3z^3) = x^2y^2z^3$

2 $9m + 18n$ {gemeenschappelijke factor 9, dus rekenregel 3} $= 9(m + 2n)$

3 $ab - ac + 3a$ {gemeenschappelijke factor a, dus rekenregel 3} $= a(b - c + 3)$

4 $pr + ps + qr + qs$ {gemeenschappelijke factor p in de eerste twee termen en q in de laatste twee termen, rekenregel 3}
$= p(r + s) + q(r + s)$ {gemeenschappelijke factor $(r + s)$; rekenregel 3}
$= (r + s)(p + q)$

5 $4a^2 - 9b^2 = (2a)^2 - (3b)^2$ {het verschil van twee kwadraten, dus rekenregel 6} =
$(2a + 3b)(2a - 3b)$

6 $m^2 + 6m + 9 = m^2 + 2 \cdot 3m + 3^2$ {rekenregel 7} $= (m + 3)^2$

7 $25a^2 - 10ab + b^2 = (5a)^2 - 2 \cdot 5ab + b^2$ {rekenregel 8} $= (5a - b)^2$

8 $x^2 - 7x + 12 = x^2 + (-3 + -4)x + -3 \cdot -4$ {rekenregel 5} $= (x - 3)(x - 4)$;
er moeten twee getallen p en q gezocht worden waarvan het product pq gelijk is aan 12 en de som $(p + q)$ gelijk is aan -7; het product is positief en de som is negatief; de gezochte getallen zijn dus *beide negatief*; deze getallen zijn -3 en -4.

$$\text{Dus } x^2 \overbrace{-\,7x}^{\text{de som van twee getallen}} + \underbrace{12}_{\text{het product van de twee getallen}}$$

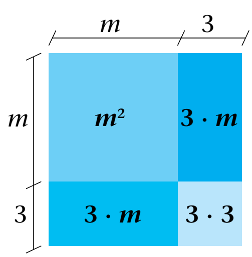
De methode in tabel 1.1 kan je daarbij helpen.

Tabel 1.1 **Ontbinden in factoren**

Twee negatieve getallen waarvan het product al kloppend is (dus 12)	**De som van de twee getallen moet –7 zijn**
–1 · –12	Som is –13, klopt niet
–2 · –6	Som is –8, klopt niet
–3 · –4	Som is –7, klopt; dus de getallen zijn –3 en –4

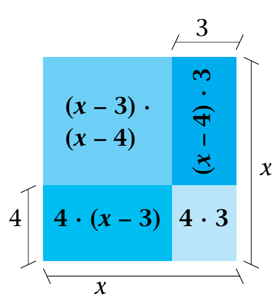
Opmerking
Zorg er bij ontbinden in factoren altijd voor, dat de termen een dalende reeks van machten vormen. Dus $-10 - 3x + x^2$ eerst herleiden tot $x^2 - 3x - 10 = (x + 2)(x - 5)$

Bij de situatie van nummer 6, $m^2 + 6m + 9$, kun je de volgende voorstelling maken:



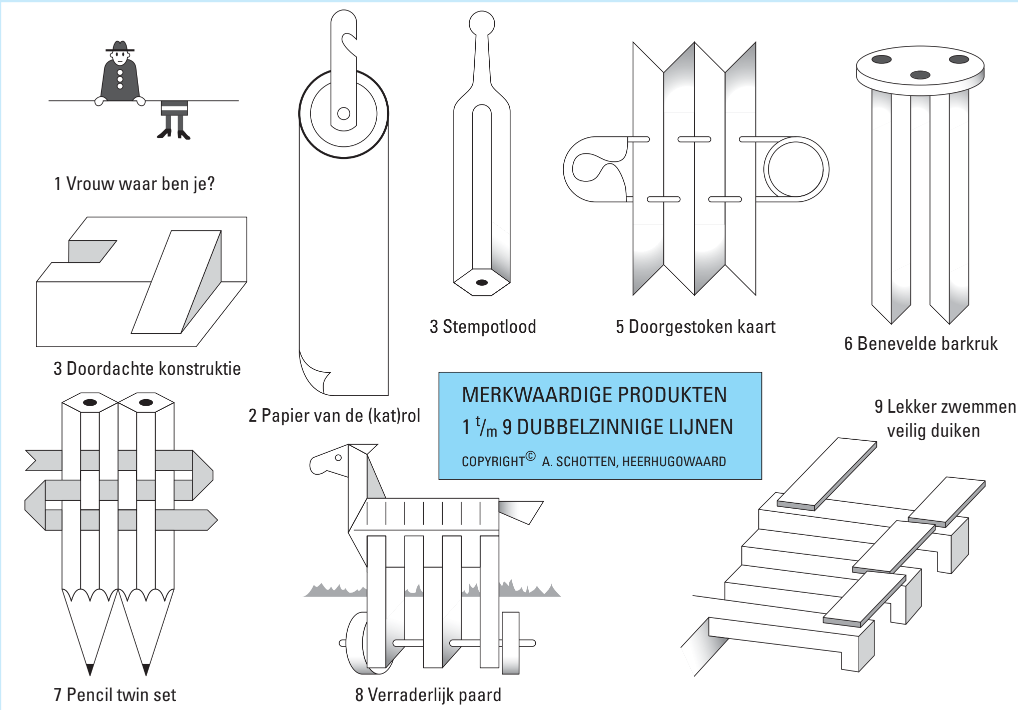
De drieterm is opgesplitst in de oppervlakten m^2, $3m$, $3m$ en 9 die horen bij rechthoeken respectievelijk van m bij m, m bij 3, 3 bij m en 3 bij 3. De som van de vier oppervlakten vormen samen de oppervlakte van een vierkant van $(m + 3)$ bij $(m + 3)$.
De juiste opsplitsing wordt gevonden met de methode uit tabel 1.1.

Een voorstelling van situatie 8 kan de volgende figuur zijn:



Een vierkant van x bij x met daarin de rechthoeken van $(x - 4)$ bij $(x - 3)$, van $(x - 4)$ bij 3, van 4 bij $(x - 3)$ en van 4 bij 3.
Uit deze figuur is af te lezen dat:
$(x - 3) \cdot (x - 4) = x^2 - 4 \cdot (x - 3) - 3 \cdot (x - 4) - 4 \cdot 3$.

Merkwaardige producten, **genomineerd bij de Escherprijsvraag in 1998**



Vrij overgenomen van www.pythagoras.nu

Bron: Ton Schotten, Heerhugowaard

Uit bovenstaande voorbeelden is de volgende theorie af te leiden:

SAMENVATTING

Rekenregels voor binnen haakjes plaatsen of het ontbinden in factoren

9 $$\underbrace{ab + ac + ad}_{\text{drieterm met gemeenschappelijke factor } a} = \underbrace{a(b + c + d)}_{\text{gemeenschappelijke factor } a \text{ buiten haakjes zetten}}$$

10 $$\underbrace{ac + bc}_{\text{gemeenschappelijke factor } c\text{; overige termen } a \text{ en } b} + \underbrace{ad + bd}_{\text{gemeenschappelijke factor } d\text{; overige termen } a \text{ en } b} = \underbrace{(a + b)}_{\text{overige termen } a \text{ en } b} \cdot \underbrace{(c + d)}_{\text{gemeenschappelijke factoren } c \text{ en } d}$$

11 $$\underbrace{a^2}_{\text{kwadraat met grondtal } a} + \underbrace{(p + q)a}_{\text{som van } p \text{ en } q \text{ maal grondtal eerste term}} + \underbrace{pq}_{\text{product van } p \text{ en } q} = \underbrace{(a + p)}_{\text{som grondtal eerste term en } p} \cdot \underbrace{(a + q)}_{\text{som grondtal eerste term en } q}$$

12 $\underbrace{a^2}_{\substack{\text{kwadraat}\\\text{met}\\\text{grondtal } a}} - \underbrace{b^2}_{\substack{\text{kwadraat}\\\text{met}\\\text{grondtal } b}} = \underbrace{(a + b)}_{\substack{\text{som}\\\text{grondtallen}}} \cdot \underbrace{(a - b)}_{\substack{\text{verschil}\\\text{grondtallen}}}$

13 $\underbrace{a^2}_{\substack{\text{kwadraat}\\\text{met}\\\text{grondtal } a}} + \underbrace{2ab}_{\substack{\text{dubbel}\\\text{product}\\\text{grondtallen}}} + \underbrace{b^2}_{\substack{\text{kwadraat}\\\text{met}\\\text{grondtal } b}} = \underbrace{(a + b)^2}_{\substack{\text{som}\\\text{grondtallen}\\\text{in het kwadraat}}}$

14 $\underbrace{a^2}_{\substack{\text{kwadraat}\\\text{met}\\\text{grondtal } a}} - \underbrace{2ab}_{\substack{\text{dubbel}\\\text{product}\\\text{grondtallen}}} + \underbrace{b^2}_{\substack{\text{kwadraat}\\\text{met}\\\text{grondtal } b}} = \underbrace{(a - b)^2}_{\substack{\text{verschil}\\\text{grondtallen}\\\text{in het kwadraat}}}$

VRAAGSTUKKEN

1.5 Los handig op, door gebruik te maken van ontbinding in factoren.

a $12^2 - 8^2 =$

b $17^2 - 3^2 =$

c $25^2 - 15^2 =$

d $38^2 - 28^2 =$

e $24^2 - 2 \cdot 24 \cdot 4 + 4^2 =$

f $12^2 + 2 \cdot 12 \cdot 8 + 8^2 =$

1.6 Bereken:

a ggf(10, 12) =

b ggf(20, 28) =

c ggf(36, 126) =

d ggf(60, 108) =

e ggf(a^3b^2c, a^2bc^3d) =

f ggf(xy^2z, x^3yz^2) =

1.7 Ontbind, indien van toepassing, zo ver mogelijk in factoren.

a $a^2 - x^2$

b $a^2 - 4x^2$

c $b^2(x + 3) + b(x + 3)$

d $x^2(a + 3) - 4(a + 3)$

1.8 Ontbind, indien van toepassing, zo ver mogelijk in factoren.

a $ab + ac + bp + cp$

b $a^3 - 2a^2 + 4a - 8$

c $a^3 - 2a^2 - 4a + 8$

UITLEG

In de volgende voorbeelden met bijbehorende opdrachten worden speciale situaties van ontbinden in factoren aan de orde gesteld. Dit leidt tot een aanvulling van de theorie die in de samenvatting is te vinden.

1 $x^4 - 1 =$

Een tweeterm; probeer deze te schrijven als het verschil van twee kwadraten. $(x^2)^2 - 1^2$ {rekenregel 12} $= (x^2 + 1)(x^2 - 1)$ {tweede factor rekenregel 12}
$= (x^2 + 1)(x + 1)(x - 1)$

2 $x^4 + 16 + 8x^2 =$

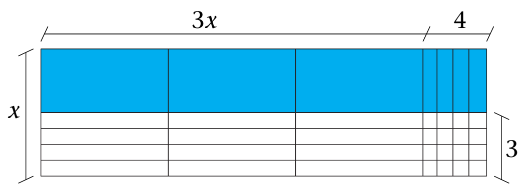
{eerst ordenen} $x^4 + 8x^2 + 16 =$ {herschrijven} $(x^2)^2 + 2 \cdot 4 \cdot x^2 + 4^2 =$ {rekenregel 13} $(x^2 + 4)^2$

3 $x^6 + 2x^3 - 3 =$

{herschrijven} $(x^3)^2 + 2x^3 - 3 =$ {rekenregel 11: zoeken naar twee getallen met product –3 en de som +2: het product is negatief, dus het zijn twee getallen waarvan de ene positief en de andere negatief is; het zijn de getallen +3 en –1} $(x^3 + 3)(x^3 - 1)$.

4 $3x^2 - 5x - 12 =$

Hier staat een drieterm waar op het eerste gezicht geen enkele rekenregel op van toepassing is. Uit de aanpak ervan zal blijken dat dit een bijzonder geval is van rekenregel 11. De ontbinding zal van de vorm $(3x + a)(x + b)$ moeten zijn met $a \cdot b = -12$ en $a + 3b = -5$. Na de zoekmethode voor twee getallen uit paragraaf 1.1.2 te hebben toegepast, vinden we $a = 4$ en $b = -3$. Dus $3x^2 - 5x - 12 = (3x + 4)(x - 3)$; een bijzonder geval van rekenregel 11. De ontbinding van $3x^2 - 5x - 12$ in $(3x + 4) \cdot (x - 3)$ is ook weer duidelijk te maken met een voorstelling van rechthoeken.



We nemen de oppervlakte van het gekleurde deel van de rechthoek gelijk aan $3x^2 - 5x - 12$. Deze oppervlakte wordt verkregen uit de oppervlakte van de hele rechthoek verminderd met de oppervlakte van het niet gekleurde deel van de rechthoek. Dus de oppervlakte van het gekleurde deel is gelijk aan $(3x + 4) \cdot (x - 3) = x \cdot (3x + 4) - 3 \cdot 3x - 3 \cdot 4 =$
$3x^2 + 4x - 9x - 12 = 3x^2 - 5x - 12$.

Opdrachten

7 Ontbind in factoren.

- **a** $n\ a^2 + 8a$
- **b** $j\ 15t^2 - 75t$
- **c** $y\ 12b + 48b^2$
- **d** $e\ h^2 - 13h$
- **e** $k\ 9p^2 - 72p$
- **f** $y\ 28x^2 + 35x$
- **g** $p\ 8q + 32$
- **h** $y\ -6x^2 + 24x$
- **i** r $-8s - 6$
- **j** d $-10e + 60e^2$
- **k** $w\ -6d - 7$
- **l** $v\ -8w - 3$

8 Ontbind in factoren.

- **a** $n\ a^2 - 12a$
- **b** $j\ 18t^2 - 60t$
- **c** $y\ 11b + 66b^2$
- **d** $e\ h^2 + 14h$
- **e** $k\ 8p^2 + 72p$
- **f** $y\ 32x^2 + 48x$
- **g** $p - 8q + 56$
- **h** $y - 5x^2 + 45x$
- **i** $r - 12s - 9$
- **j** $d - 4e + 52e^2$
- **k** $w - 11d - 8$
- **l** $v - 2w - 9$

9 Ontbind in factoren.

- **a** $x^4 - 4a^2$
- **b** $14t^3 + 49 + t^6$
- **c** $s^4 - 10s^2 + 21$
- **d** $6c^2 + c - 12$; probeer $(3c + a)(2c + b)$

SAMENVATTING

Uit voorgaande voorbeelden en opdrachten blijkt de theorie als volgt aangevuld te kunnen worden:

Rekenregels

15 $x^{2p} - y^{2q} = (x^p)^2 - (y^q)^2 = (x^p - y^q)(x^p + y^q)$

16 $x^{2p} \pm 2x^py^q + y^{2q} = (x^p)^2 \pm 2x^py^q + (y^q)^2 = (x^p \pm y^q)^2$

Van voorgaande situaties zijn weer varianten te bedenken door een coëfficiënt te plaatsen vóór n^n en/of y^m.

Rekenregel

17 $ax^2 + bx + c = (rx + p)(sx + q)$, **met** r **en** s **gegeven; voor** p **en** q **geldt** $pq = c$ **en** $(rq + ps) = b$

VRAAGSTUKKEN

1.9 Ontbind, indien van toepassing, zo ver mogelijk in factoren.

a $a^8 - 6a^4b^2 + 9b^4$

b $4a^8 + 16a^4 + 16$

1.10 Ontbind, indien van toepassing, zo ver mogelijk in factoren.

a $(2x + 1)^2 - (x + 2)^2$

b $3x^2 + 11x + 10$ {probeer $(3x + p)(x + q)$}

c $7x^2 - 9x + 2$ {probeer $(7x + p)(x + q)$}

1.11 Ontbind, indien van toepassing, zo ver mogelijk in factoren.

a $a^8 - b^8$

b $4a^2 + 2a - 12$; $\{4a^2 = (2^a)^2\}$

c $x^2 - 50x - 600$

d $4a^6 - 6a^3 + 2\frac{1}{4}$; $\{4a^6 = (2a^3)^2\}$

e $5x^2 + 14x - 3$; {probeer $(5x + a)(x + b)$}

f $4a^2 + \dfrac{1}{4a^2} + 2$

1.1.3 Vierkantsvergelijkingen en de abc-formule

Het ontbinden in factoren wordt onder andere toegepast bij het oplossen van vierkantsvergelijkingen. Het ontbinden in factoren is echter maar één van de oplossingsmethoden die in deze paragraaf aan de orde komen. Een andere manier om kwadratische vergelijkingen op te lossen is de abc-formule.
Om deze paragraaf te kunnen uitvoeren moet je de rekenregels voor het oplossen van vergelijkingen kennen; linker- en rechterlid van de vergelijking mogen met hetzelfde getal vermenigvuldigd, vermeerderd of verminderd worden en mogen door hetzelfde getal gedeeld worden.

Vierkantsvergelijkingen oplossen door ontbinden in factoren

Definitie

De vergelijking $ax^2 + bx + c = 0$, **met** a, b **en** c **constanten en** $a \neq 0$ **heet een vierkantsvergelijking in** x.

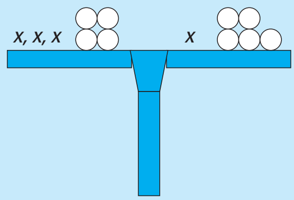
Vierkantsvergelijking

De vergelijking wordt ook tweedegraadsvergelijking of vergelijking van de tweede graad genoemd: de hoogste macht waarin de onbekende x voorkomt, is de tweede macht.

UITLEG

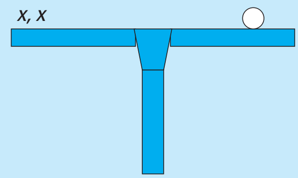
Vergelijkingen zijn evenwichtstoestanden tussen het linker- en rechterdeel van de vergelijking, zie figuur 1.4. Hierop zijn rekenregels van toepassing die het evenwicht niet verstoren.

Figuur 1.4a



In de vergelijking $3x + 4 = x + 5$, is er evenwicht tussen linker- en rechterlid

Figuur 1.4b



Door in de vergelijking links en rechts $1x$ weg te halen en links en rechts 4 kogeltjes met elk een waarde van 1 weg te halen, blijft er een evenwicht. De vergelijking $3x + 4 = x + 5$ is dan gelijkwaardig aan $2x = 1$ en dus $x = \frac{1}{2}$

In de nu volgende voorbeelden worden vierkantsvergelijkingen opgelost. Hieruit zijn de stappen af te leiden volgens welke zo'n oplossing verloopt.

1 Los x op uit de vergelijking $x^2 + x - 12 = 0$.

Oplossing:
$x^2 + x - 12 = 0 \Leftrightarrow$ {drieterm, rekenregel 3 van ontbinden in factoren}
$(x + 4)(x - 3) = 0 \Leftrightarrow$ {één der factoren is gelijk aan 0}
$x + 4 = 0 \quad$ of $\quad x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = -4 \quad$ of $\quad x = 3$

2 Los t op uit de vergelijking $2t^2 + 5t = 3$.

Oplossing:
$2t^2 + 5t = 3 \Leftrightarrow$ {op nul herleiden; linker- en rechterdeel met 3 verminderen}
$2t^2 + 5t - 3 = 0 \Leftrightarrow$ {drieterm, bijzonder geval van rekenregel 3 van ontbinden in factoren}
We proberen $(2t + a)(t + b) = 0$, met $ab = -3$ en $a + 2b = 5$; we vinden
$a = -1$ en $b = 3 \Leftrightarrow (t + 3)(2t - 1) = 0 \Leftrightarrow t + 3 = 0 \quad$ of
$2t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = -3 \quad$ of $\quad t = \frac{1}{2}$

Uit bovenstaande voorbeelden is de volgende theorie af te leiden:

SAMENVATTING

De stappen om een vierkantsvergelijking met ontbinden in factoren op te lossen, zijn:
1 Herleid de vergelijking op 0.
2 Bepaal met welke rekenregel de kwadratische vorm te ontbinden is en voer de ontbinding uit.
3 Stel beide factoren gelijk aan 0 en los de zo verkregen vergelijkingen op.

VRAAGSTUK

1.12 Los de volgende vergelijkingen op:

a $x^2 - 16 = 5$
b $a^2 - 2a - 15 = 0$
c $p^2 + 3p - 36 = 4$
d $y^2 - 8y + 16 = 2y - 9$
e $2b^2 - 12b = 8b - 42$
f $q^3 + 3q^2 - 51q = 8q^2 + 33q$
g $2x^2 - 2x - 12 = x + 8$
h $y^2 - 18y + 1 = -2y^2 + 5y + 9$

Hypatia van Alexandrië (370–415)

Niet van alle onderwerpen uit dit boek is precies bekend wanneer ze bedacht en opgeschreven zijn. Waar dit wel mogelijk is, maken we er steeds in deze 'stories' melding van. Zo is bijvoorbeeld bekend dat de algebraïsche beschrijvingen van meetkundige zaken als rechte lijnen, parabolen en hyperbolen door René Descartes (1596–1650) zijn 'uitgevonden'.
De stof uit dit boek is ontwikkeld in een periode van grofweg, 400 tot 1800 na Christus.
Eén van de personen die deze periode afbakenen is Hypatia van Alexandrië. Hypatia is de eerste vrouw van wie we weten welke onderwerpen uit de wiskunde zij beheerste en hoe zij heeft geleefd. Zij was een dochter van Theon, een professor uit Alexandrië, die ook haar opvoeding verzorgde in kunst, literatuur, wetenschap en filosofie, waarin zij hem snel evenaarde. Naast deze zware kost zorgde hij ook voor een goede lichamelijke opvoeding door haar te laten roeien, paardrijden, zwemmen en bergbeklimmen.
Op een van haar reizen naar Athene en in de contacten met wiskundigen aldaar ontdekte zij haar talenten voor wiskunde; teruggekeerd in Alexandrië werd haar gevraagd om lerares wiskunde en filosofie te worden aan de universiteit van Alexandrië. Haar lessen zowel thuis als op het instituut, trokken veel belangstelling van geleerden uit Europa, Azië en Afrika.
Haar colleges over de rekenkunde gingen onder andere over het oplossen van eerstegraads- en tweedegraadsvergelijkingen.
Verder schreef zij boeken over sterrenkunde, meetkunde en kegelsneden (parabolen, ellipsen en hyperbolen). Pas toen 1000 jaar later mannen als Newton en Descartes het onderwerp over kegelsneden oppakten, zijn er weer vorderingen gemaakt op dat terrein. Aan Hypatia wordt de uitvinding toegeschreven van apparaten voor het destilleren van water, voor het bepalen van het waterpeil en voor het bepalen van de soortelijke massa van vloeistof (de hydroscoop). Ook ontwierp zij enkele methoden voor het beoefenen van de sterrenkunde (het meten van ruimtehoeken en het projecteren van bollen op vlakken).
Ze was immens populair; brieven uit de hele wereld met als enige adres 'De filosoof' werden haar bezorgd. Ze is waarschijnlijk niet getrouwd geweest, vermoedelijk omdat de vele beschikbare kandidaten haar intellectueel niet konden volgen en steunen. Het wetenschappelijke rationalisme dat zij binnen de neoplatonische filosofie uitdroeg, viel niet in goede aarde bij de fanatieke christenen uit die tijd. Ondanks de bescherming van de Romeinse prefect van Alexandrië viel ze in handen van godsdienstfanaten, werd op klaarlichte dag uit haar rijtuig gesleept en op afschuwelijke wijze vermoord.
Hypatia is de laatste wiskundige geweest die van zich heeft doen spreken; gedurende bijna duizend jaar na haar dood lijkt de wiskunde stil gestaan te hebben, met uitzondering van de publicaties van een enkeling zoals Leonardo Fibonacci en de kloosterlinge Hroswitha.

UITLEG

In de volgende voorbeelden wordt de theorie toegepast op bijzondere situaties van vergelijkingen en wel van vierkantsvergelijkingen die lastig te ontbinden zijn in factoren en van hogeremachtsvergelijkingen. De theorie hierover is in de samenvatting nog eens beknopt weergegeven.

1 Los a op uit de vergelijking $6a^2 + a - 2 = 0$.

Oplossing:
We proberen $(3a + p)(2a + q) = 0$, met $pq = -2$ en $2p + 3q = 1$.
We vinden $p = 2$ en $q = -1$. Daaruit volgt:
$(3a + 2)(2a - 1) = 0 \Leftrightarrow$
$3a + 2 = 0$ of $2a - 1 = 0 \Leftrightarrow$
$a = -\frac{2}{3}$ of $a = \frac{1}{2}$

2 Los s op uit de vergelijking $4s^3 + 12s^2 = -9s$.

Oplossing:
$4s^3 + 12s^2 + 9s = 0 \Leftrightarrow$
$s(4s^2 + 12s + 9) = 0 \Leftrightarrow$
$s(2s + 3)^2 = 0 \Leftrightarrow$
$s = 0$ of $2s + 3 = 0 \Leftrightarrow$
$s = 0$ of $s = -\frac{3}{2}$

3 Los p op ut de vergelijking $3p^2 - 9 = 0$.

Oplossing:
$3p^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow$
$p^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow$
$p^2 = 3 \Leftrightarrow$
$p = \pm\sqrt{3}$

Vierkantsvergelijkingen oplossen met de abc-formule

De methode ‘ontbinden in factoren’ is natuurlijk een kwetsbare methode: als de vkv niet te ontbinden is, kan met deze methode geen oplossing gevonden worden. De abc-formule, genoemd naar de coëfficiënten van de vergelijking $ax^2 + bx + c = 0$, is daar een oplossing voor.

De vergelijking $3x^2 - 14x - 5 = 0$ is niet zo maar met ontbinden in factoren op te lossen. In de abc-formule die in zo’n geval gehanteerd wordt, spelen de constanten 3 vóór x^2, –14 vóór x en de constante –5 een grote rol. Zij zijn bepalend voor de oplossing van x. De exponenten a, b en c uit $ax^2 + bx + c = 0$ zijn dan ook alle in de oplossingsformule voor de tweedegraadsvergelijking terug te vinden. We leiden die formule niet af. Van de vierkantsvergelijking $ax^2 + bx + c = 0$ zijn x_1 en x_2 de oplossingen waarbij geldt:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

abc-formule Deze uitdrukking voor x_1 en x_2 noemen we de abc-formule.

UITLEG

1 De abc-formule toegepast op voorgaande vergelijking $3x^2 - 14x - 5 = 0$ geeft:

$$x_1 = \frac{-(-14) + \sqrt{(-14)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-5)}}{2 \cdot 3} \quad \text{en}$$

$$x_2 = \frac{-(-14) - \sqrt{(-14)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-5)}}{2 \cdot 3} \quad \Leftrightarrow$$

$$x_1 = \frac{14 + \sqrt{256}}{6} = 5 \quad \text{en} \quad x_2 = \frac{14 - \sqrt{256}}{6} = -\tfrac{1}{3}.$$

Controle: $3 \cdot (5)^2 - 14 \cdot (5) - 5 = 0$ en

$3 \cdot (-\tfrac{1}{3})^2 - 14 \cdot (-\tfrac{1}{3}) - 5 = \tfrac{1}{3} + \tfrac{14}{3} - \tfrac{15}{3} = 0.$

2 Los t op uit de vergelijking $5t^2 + 9t + 3 = 0$

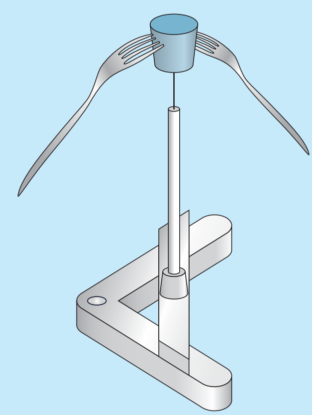
$$t_1 = \frac{-9 + \sqrt{(9)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 3}}{2 \cdot 5} \quad \text{en} \quad t_2 = \frac{-9 - \sqrt{(9)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 3}}{2 \cdot 5} \quad \Leftrightarrow$$

$$t_1 = \frac{-9 + \sqrt{21}}{10} \approx 0{,}458 \quad \text{en} \quad t_2 = \frac{-9 - \sqrt{21}}{10} \approx -1{,}358$$

Opmerking:
Als de uitkomst van $b^2 - 4ac$ onder het wortelteken negatief is, zijn er geen reële oplossingen. Deze uitkomst heeft dus een discriminerende (onderscheidende) functie. Daarom wordt $b^2 - 4ac$, kortweg aangeduid met D, de discriminant genoemd. Voordat gerekend wordt aan oplossingen is het verstandig eerst de discriminant D te bepalen. Als $D < 0$ dan zijn er geen reële oplossingen!

Discriminant

Figuur 1.5 **Stabiel evenwicht**



1 Los a op uit de vergelijking $2a^2 + 3a + 5 = 0$.

$2a^2 + 3a + 5 = 0 \Leftrightarrow$

$$a = \frac{-3 \pm \sqrt{(3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 5}}{2 \cdot 2} = \frac{-3 \pm \sqrt{-31}}{4}.$$

De discriminant is gelijk aan –31 en dus heeft de vkv geen reële oplossingen.

2 Los y op uit de vergelijking $9y^2 - 186y = -961$
$9y^2 - 186y = -961 \Leftrightarrow$
$9y^2 - 186y + 961 = 0 \Leftrightarrow$

$$y_{1,2} = \frac{-(-186) \pm \sqrt{(-186)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 961}}{2 \cdot 9} = \frac{186 \pm \sqrt{0}}{18} = 10\tfrac{1}{3}$$

Als discriminant $D = 0$, levert de vkv twee dezelfde oplossingen op!

Opdrachten

10 Los op.

a $x^2 + 6x = 0$
b $6g - 10g^2 = 0$
c $3n^2 + 27n = 0$
d $-t^2 - 8t = 0$
e $5x^2 - 20x = 0$
f $4h^2 - 22h = 0$
g $3r - 9r^2 = 0$
h $-5y^2 + 45y = 0$

11 Los op.

a $x^2 + 9x = 0$

b $8g - 20g^2 = 0$

c $5n^2 + 35n = 0$

d $-t^2 - 11t = 0$

e $6x^2 - 36x = 0$

f $6h^2 - 45h = 0$

g $2r - 12r^2 = 0$

h $-7y^2 + 56y = 0$

12 Los t op uit de vergelijking $10t^2 + 13t - 3 = 0$.

13 Los x op uit de vergelijking $18x^4 + 12x^3 + 2x^2 = 0$.

14 Los q op uit de vergelijking $3q^3 - 15q = 0$.

15 Los t op uit de vergelijking $t^2 + 4 = -6t$.

16 Los x op uit de vergelijking $-2x^2 - 10 = -7x$. Bereken eerst de discriminant D om te bepalen of en hoeveel oplossingen er zijn.

SAMENVATTING

Uit de uitleg en de opdrachten blijkt dat we de samenvatting over het oplossen van hogeremachtsvergelijkingen als volgt moeten aanpassen:

Stappen voor het oplossen van vierkants- en hogeremachtsvergelijkingen:

1 Herleid de vergelijking op 0.

2 Deel indien mogelijk alle termen door een gemeenschappelijke constante.

3 Haal een mogelijke gemeenschappelijke factor van de onbekende variabele buiten haakjes; tussen de haakjes ontstaat een veelterm van de macht 2: $ax^2 + bx + c$.

De veelterm van de macht 2 is te ontbinden

4 Bepaal met welke regel deze veelterm te ontbinden is en voer de ontbinding uit.

5 Stel de factoren gelijk aan 0 en los de zo verkregen vergelijking op.

Opmerking

De vergelijking $x^n - c = 0$, met $c > 0$, herleiden we tot $x^n = c$; deze vergelijking heeft als reële oplossing

$x = \pm \sqrt[n]{c}$ als n is een even getal of

de oplossing $x = \sqrt[n]{c}$, als n is een oneven getal.

Het deel tussen haakjes is niet te ontbinden

4 *a* Als stap 3 van toepassing is, stel dan de factoren gelijk aan 0.

***b* Los de veelterm van de macht 2 op met de abc-formule, deze luidt:**

Gegeven de vergelijking in x $ax^2 + bx + c = 0$, dan geldt:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ of}$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

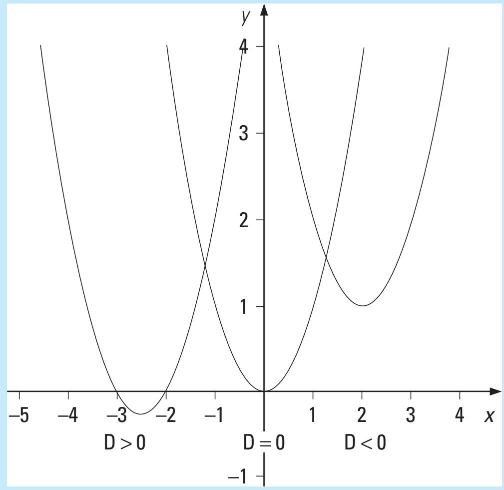
Opmerking

$D = b^2 - 4ac$ is de discriminant; met de waarde ervan kan men onderscheiden (discrimineren) hoeveel oplossingen de vkv heeft:

- als $D > 0$ dan twee oplossingen
- als $D = 0$ dan twee gelijke oplossingen
- als $D < 0$ dan geen reële oplossingen

De grafiek van $ax^2 + bx + c$ is een parabool, zie figuur 1.6. Als D > 0 dan heeft de grafiek twee verschillende snijpunten met de x-as, als D = 0 heeft de grafiek precies één snijpunt (twee samenvallende snijpunten) met de x-as. In het geval D < 0 heeft de grafiek geen enkel snijpunt met de x-as.

Figuur 1.6 **De grafiek van $y = ax^2 + bx + c$ in drie verschillende situaties**



VRAAGSTUKKEN

1.13 Los onderstaande vergelijkingen op.

a $2t^2 + t = 6$

b $x^2 = 3p^2$ {x is de variabele en p is een constante}

c $3s^2 + s - 2 = 0$

d $y^4 - 3y^3 - 10y^2 = 0$

e $(x - 1)^2 = x - 1$

f $(x + 2)^2 = 5x + 16$

1.14 Bekijk nog eens vraagstuk 1.13a, c, e en f. Bepaal van deze vraagstukken de som van de wortels $x_1 + x_2$ en het product van de wortels $x_1 \cdot x_2$.
Kun je verklaren dat voor de som van de wortels van de vierkantsvergelijking $ax^2 + bx + c$ geldt $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ en voor het product $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$. Betrek hierbij de oplossingsmethode voor het ontbinden in factoren!

François Viète (1540–1603)

Deze eigenschap staat bekend als de stelling van Viète.
Viète was een Franse jurist. Wiskunde was voor hem meer een hobby. Hij was echter een zeer bedreven hobbyist. Hij wordt de ‘vader van de algebra’ genoemd en legde de basis voor het moderne wiskundig symbolisme: hij introduceerde hierbij het gebruik van onbekenden in de algebra en symbolen voor rekenoperaties zoals + en – . Tot dan werden deze operaties met woorden aangeduid. Hij zocht vooral naar oplossingsmethoden voor allerlei algebraïsche vergelijkingen.

1.15 Van de vkv $2x^2 - 3x + p = 0$ is één van de oplossingen gelijk aan 2. Bereken p en de andere oplossing.

1.16 Van twee getallen is de som 24 en het product 128. Bereken deze getallen.

1.17 Los onderstaande vergelijkingen op.

a $3x^2 + 10x - 7 = 0$

b $6t^2 - 2t - \frac{1}{4} = 0$

c $6s^2 - 4s - \frac{1}{4} = 0$

d $-2p^2 + 3p - 1 = 0$

e $1\frac{1}{3} + 4y + \frac{1}{2}y^2 = 0$

f $2x^2 - \frac{5}{4}x - \frac{3}{16} = 0$

1.18 Stel de vkv $ax^2 + bx + c = 0$ op waarvan $a = 1$ en waarvan $x = -1$ en $x = 2$ de oplossingen zijn.

1.19 De vkv $2t^2 + mt + 2 = 0$ heeft twee gelijke oplossingen. Bereken m en die oplossing.

1.20 Toon aan dat de vkv $s^2 - (2k + 3)s + 3k = 0$ voor ieder reëel getal k twee verschillende oplossingen bezit.

1.21 Een voorwerp wordt vanaf de grond verticaal omhoog geschoten met beginsnelheid 10 m/s. Bereken de maximale hoogte die het voorwerp bereikt en bereken hoelang het in de lucht blijft. Neem $g = 9{,}8$ m/s^2.

1.1.4 Stelsel lineaire vergelijkingen

Een situatie waarin haakjes wegwerken zeker van toepassing is, is het oplossen van een stelsel van eerstegraads – lineaire – vergelijkingen. Het oplossen van een stelsel lineaire vergelijkingen doet zich bijvoorbeeld voor, als het snijpunt van twee elkaar snijdende lijnen bepaald moet worden, zie leereenheid 2.1. Maar ook eenvoudige problemen in de scheikunde, planologie, economie en milieuhygiëne zijn te vertalen in een stelsel van lineaire vergelijkingen waarvan de oplossing gevonden wordt door het oplossen van dit stelsel van vergelijkingen.
In deze paragraaf komen twee methoden aan de orde, de eliminatie- en de substitutiemethode.

Het oplossen van een stelsel lineaire vergelijkingen met de eliminatiemethode

Definitie

Het bij elkaar horend aantal eerstegraadsvergelijkingen waaraan de onbekende gelijktijdig moeten voldoen, heet een stelsel van lineaire vergelijkingen.
Dit stelsel van lineaire vergelijkingen (in x en y) wordt als volgt genoteerd:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

a_1, a_2, b_1, b_2, c_1 en c_2 zijn gegeven constanten en x en y de onbekenden.

UITLEG

De volgende voorbeelden gaan over het oplossen van stelsels lineaire vergelijkingen. Uit deze voorbeelden is de aanpak om tot een juiste oplossing te komen af te leiden.

1 Gegeven het volgende stelsel van lineaire vergelijkingen:

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x + 3y = 13 \end{cases}$$

Oplossing:

{de eerste vergelijking wordt links en rechts met 2 vermenigvuldigd en de tweede regel wordt links en rechts met –1 vermenigvuldigd, zodat de coëfficiënt van x in de eerste en tweede regel hetzelfde en tegengesteld is}

$$\left\{\begin{array}{l|l|} x + y = 5 & \cdot\ 2 \\ 2x + 3y = 13 & \cdot -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x + y) = 2 \cdot 5 \\ -1 \cdot (2x + 3y) = -1 \cdot 13 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2y = 10 \\ -2x + -3y = -13 \end{cases} \Leftrightarrow$$

{we maken een nieuw stelsel dat bestaat uit de eerste regel en het resultaat van de som van de eerste en de tweede regel}

$$\begin{cases} 2x + 2y = 10 \\ -y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

{substitueer $y = 3$ in de eerste vergelijking, zodat de oplossing van x bepaald kan worden}

$$\begin{cases} 2x + 6 = 10 \\ y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$$

Het ‘verdrijven van de haakjes’ zal niet meer in de uitwerkingen worden opgenomen.

2 Gegeven het volgende stelsel van lineaire vergelijkingen:

$$\begin{cases} \dfrac{t}{3} + \dfrac{s}{5} = 5 \\ 3s - 5t = 15 \end{cases}$$

Los t en s hieruit op.

Oplossing:

{breuken wegwerken; handig!}

$$\left\{\begin{array}{l|l|} \dfrac{t}{3} + \dfrac{s}{5} = 5 & \cdot\ 15 \\ 3s - 5t = 15 & \cdot\ 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} 5t + 3s = 75 \\ 3s - 5t = 15 \end{cases} \Leftrightarrow$$

{volgorde termen tweede regel aanpassen}

$$\begin{cases} 5t + 3s = 75 \\ -5t + 3s = 15 \end{cases} \Leftrightarrow$$

{tweede regel vervangen door som van regel 1 en 2}

$$\begin{cases} 5t + 3s = 75 \\ 6s = 90 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5t + 45 = 75 \\ s = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 6 \\ s = 15 \end{cases}$$

Een stelsel lineaire vergelijkingen in een praktische situatie.
Een scheikundige heeft 70 liter nodig van een 50% alcohol-oplossing.
Ze heeft de beschikking over een 30% en over een 80% alcohol-oplossing.
Hoeveel liter moet ze van elke oplossing mengen om 70 liter van een 50% alcohol-oplossing te krijgen?

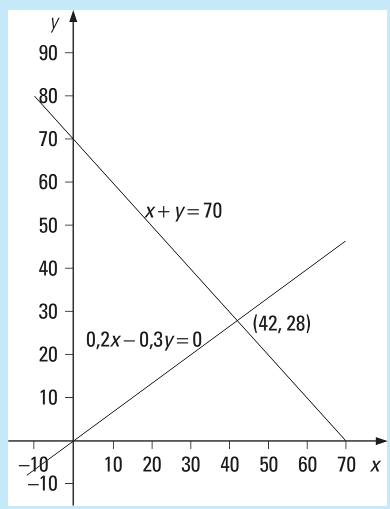
We zoeken naar het aantal liter van de 30% alcoholoplossing en naar het aantal liter van de 80% alcoholoplossing. Omdat we deze hoeveelheden niet kennen noemen we ze respectievelijk x en y. De tekst is nu te herleiden tot het stelsel van de volgende lineaire vergelijkingen:

$$\begin{cases} x + y = 70 \\ 0{,}3x + 0{,}8y = 0{,}5 \cdot (x + y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 70 \\ 0{,}2x - 0{,}3y = 0 \end{cases} \left| \begin{array}{l} \cdot\ 1 \\ \cdot -5 \end{array} \right| \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 70 \\ -x + 1{,}5y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2{,}5y = 70 \\ -x + 1{,}5y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 28 \\ x = 42 \end{cases}$$

Dus ze heeft 42 liter nodig van de 30% alcohol-oplossing en 28 liter van de 80% alcohol-oplossing.
Opmerking: in de tweede vergelijking mag je $0{,}5 \cdot (x + y)$ natuurlijk vervangen door 35.

In paragraaf 2.1 zul je leren dat elke lineaire vergelijking met twee onbekenden (hier x en y) voorgesteld kan worden door een rechte lijn. Bij het oplossen van een stelsel van twee lineaire vergelijkingen zoeken we naar het snijpunt van de twee lijnen. Voorgaand voorbeeld ziet er dan uit als afgebeeld in figuur 1.7.

Figuur 1.7 **Snijpunt *x* en *y* bij lineaire vergelijking**



Het oplossen van een stelsel lineaire vergelijkingen met de substitutiemethode

In het volgende voorbeeld wordt een andere methode dan de eliminatiemethode besproken voor het oplossen van een stelsel vergelijkingen. De aanpak, de substitutiemethode staat hierna in de samenvatting.

Los x en y op uit onderstaand stelsel van vergelijkingen met de substitutiemethode.

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x + 3y = 13 \end{cases}$$

Oplossing:

$$\begin{cases} x = 5 - y \\ 2(5 - y) + 3y = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 - y \\ 10 + y = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$$

Uit de voorbeelden is de volgende theorie af te leiden:

SAMENVATTING

Substitutiemethode

Stappen nodig voor het oplossen van een stelsel vergelijkingen met de substitutiemethode:

1. **Gebruik één van de vergelijkingen om de ene onbekende uit te drukken in de andere.**
2. **Substitueer deze onbekende in de andere vergelijking en los deze op.**
3. **Bereken met deze oplossing de waarde van de andere onbekende.**

Eliminatiemethode

Stappen nodig voor het oplossen van een stelsel lineaire vergelijking met de eliminatiemethode:

1. **Werk eventuele breuken weg.**
2. **Pas de volgorde van de termen zo aan dat gelijksoortige termen onder elkaar staan.**
3. **Vermenigvuldig beide regels zodanig dat de coëfficiënten vóór één van de onbekenden hetzelfde en tegengesteld zijn, zodat na optelling van beide regels die onbekende geëlimineerd is.**
4. **Reken de waarde uit van de overgebleven onbekende.**
5. **Substitueer de gevonden waarde van de onbekende in de andere regel en reken de waarde uit van de resterende onbekende.**

VRAAGSTUKKEN

1.22 Los de volgende stelsels vergelijkingen op:

a $\begin{cases} -x - 2y = 5 \\ x + 5y = -8 \end{cases}$

b $\begin{cases} 2x - 3y = 10 \\ -x + 5y = -8 \end{cases}$

c $\begin{cases} 5x - y = 7 \\ 2x + 6y = -4 \end{cases}$

d $\begin{cases} -2x + y = 2 \\ x - y = -1 \end{cases}$

1.23 Van een rechthoek is de omtrek gelijk aan 23,5 m. De oppervlakte van deze rechthoek is gelijk aan 31,875 m^2.
Leid uit deze situatie een stelsel vergelijkingen af voor de lengte l en de breedte b en los dit stelsel op.

UITLEG

In de volgende voorbeelden met bijbehorende opdrachten wordt bovenstaande theorie toegepast. Bovendien worden in een aantal voorbeelden en opdrachten specifieke situaties van een stelsel van vergelijkingen behandeld. In ‘Samenvatting’ staat de inhoud hiervan samengevat.

1 Los a en b op uit het volgend stelsel van vergelijkingen.

$$\begin{cases} 2a + 8b = -5 \\ -6a - 4b = -10 \end{cases}$$

Oplossing:
(We gebruiken de eliminatiemethode.)

$$\begin{cases} 2a + 8b = -5 \\ -6a - 4b = -10 \end{cases} \left| \begin{array}{l} \cdot\ 1 \\ \cdot\ 2 \end{array} \right| \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + 8b = -5 \\ -12a - 8b = -20 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a + 8b = -5 \\ -10a = -25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -1\frac{1}{4} \\ a = 2\frac{1}{2} \end{cases}$$

2 Los a en b op uit het volgend stelsel van vergelijkingen.

$$\begin{cases} 2a = -8b - 5 \\ -6a - 4b = -10 \end{cases}$$

Oplossing:
(We gebruiken de substitutiemethode.)

$$\begin{cases} a = -4b - 2\frac{1}{2} \\ -6(-4b - 2\frac{1}{2}) - 4b = -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -4b - 2\frac{1}{2} \\ 24b + 15 - 4b = -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2\frac{1}{2} \\ b = -1\frac{1}{4} \end{cases}$$

3 Los p en q op uit het volgend stelsel van vergelijkingen.

$$\begin{cases} 6p - 4q = 22 \\ 3p = 11 + 2q \end{cases}$$

Oplossing:

$$\begin{cases} 6p - 4q = 22 \\ 3p - 2q = 11 \end{cases} \left| \begin{array}{l} \cdot\ \ 1 \\ \cdot\ -2 \end{array} \right| \Leftrightarrow \begin{cases} 6p - 4q = 22 \\ -6p + 4q = -22 \end{cases}$$

Identiek
Afhankelijk

{De eerste regel laten we onveranderd; de optelling van de eerste en tweede regel levert geen extra vergelijking op; dit betekend dat er maar één vergelijking is waarmee twee onbekenden opgelost moeten worden! In zo'n geval voldoen *oneindig veel oplossingen*, bijvoorbeeld $p = 1$ en $q = -4$, $p = 2$ en $q = -2\frac{1}{2}$, $p = 3$ en $q = -1$; de vergelijkingen heten *identiek* of ook wel *afhankelijk*.}

4 Los s en t op uit het volgend stelsel vergelijkingen.

$$\begin{cases} s = 1 - t \\ -3t = 3s + 2 \end{cases}$$

Oplossing:

$$\begin{cases} s + t = 1 \\ -3s - 3t = 2 \end{cases} \left| \begin{array}{l} \cdot\ 3 \\ \cdot\ 1 \end{array} \right| \Leftrightarrow \begin{cases} 3s + 3t = 3 \\ -3s - 3t = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3s + 3t = 3 \\ 0 = 5 \end{cases}$$

Strijdig

{Dit resultaat kan natuurlijk niet! De vergelijkingen heten in dit geval *strijdig*, er zijn *geen oplossingen* die aan beide vergelijkingen voldoen.}

5 Los a, b en c op uit de volgende vergelijkingen. Gebruik de eliminatie-methode.

$$\begin{cases} a + b + c = 7 \\ 2a - b + c = 1 \\ a - b - 2c = -4 \end{cases}$$

Oplossing:

$$\begin{cases} a + b + c = 7 \\ 2a - b + c = 1 \\ a - b - 2c = -4 \end{cases}$$

{nieuwe vergelijking uit som van eerste en tweede vergelijking en een nieuwe vergelijking uit som van eerste en derde vergelijking}

$$\begin{cases} 3a \quad\quad + 2c = 8 \\ 2a \quad\quad - \ c = 3 \\ \ a + b + \ c = 7 \end{cases} \left| \begin{matrix} \cdot 1 \\ \cdot 2 \\ \ \end{matrix} \right| \Leftrightarrow \begin{cases} 3a \quad\quad + 2c = 8 \\ 4a \quad\quad - 2c = 6 \\ \ a + b + \ c = 7 \end{cases} \Leftrightarrow$$

{nieuwe vergelijkingen uit som eerste en tweede vergelijking}

$$\begin{cases} 3a \quad\quad + 2c = 8 \\ 7a \quad\quad\quad\quad = 14 \\ \ a + b + \ c = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6 \quad\quad + 2c = 8 \\ a \quad\quad\quad\quad = 2 \\ 2 + b + \ c = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 1 \\ a = 2 \\ b = 4 \end{cases}$$

De drie situaties die zich kunnen voordoen bij het oplossen van een stelsel van twee lineaire vergelijkingen kunnen grafisch worden voorgesteld als afgebeeld in figuur 1.8a, b en c (p. 31).

Opdrachten

17 Los telkens x en y op uit de volgende stelsels van vergelijkingen:

a $\begin{cases} x = 4 \\ y = 5 \end{cases}$

b $\begin{cases} y = x \\ y = -x \end{cases}$

c $\begin{cases} y = x + 1 \\ y = -x + 5 \end{cases}$

d $\begin{cases} y = -x + 1 \\ y = x + 1 \end{cases}$

18 Los x en y op uit het volgende stelsel van vergelijkingen.

$\begin{cases} -3y + 2x = 12 \\ -x + 1\frac{1}{2}y = -6 \end{cases}$

19 Los m en n op uit het volgende stelsel van vergelijkingen.

$\begin{cases} -3m + 2n = 18 \\ -4n = -6m - 40 \end{cases}$

20 Los x, y en z op uit het volgende stelsel van vergelijkingen.

$\begin{cases} \ \ x + 2y + 3z = 19 \\ -x + \ \ y + \ \ z = 8 \\ 2x - \ \ y + 2z = 9 \end{cases}$

21 Los r en s uit het volgende stelsel van vergelijkingen.

$\begin{cases} 6s = 15r + 29 \\ 3r + 2s = -1 \end{cases}$

22 Los x, y en z op uit het volgende stelsel van vergelijkingen.

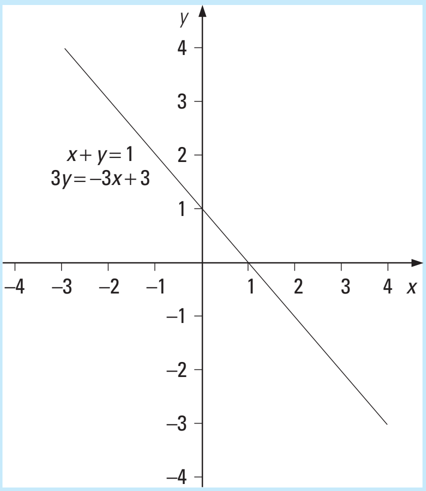
$\begin{cases} z = -3x + 2y + 4 \\ 2x + 3y - 4z = 0 \\ 8x - 7y + 2z = 6 \end{cases}$

Een lineaire vergelijking met drie onbekenden kan grafisch weergegeven worden door een vlak. Een onafhankelijk stelsel van drie lineaire vergelijkingen kan grafisch weergegeven worden door middel van drie vlakken die elkaar snijden in één punt, zie figuur 1.9. Hier is weergegeven het stelsel:

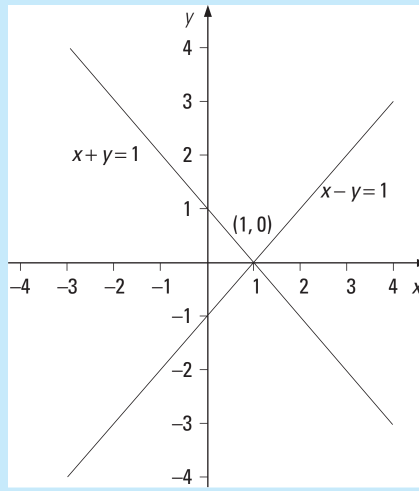
$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ x + y + z = 1 \\ -x + y + z = 1 \end{cases}$$

De oplossing is (0, 0, 1).

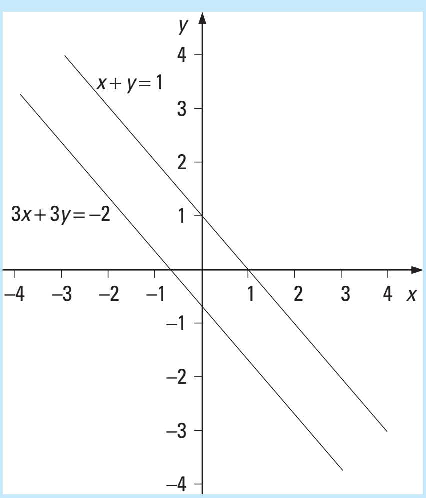
Figuur 1.8a **Een afhankelijk stelsel** (Oneindig veel oplossingen)



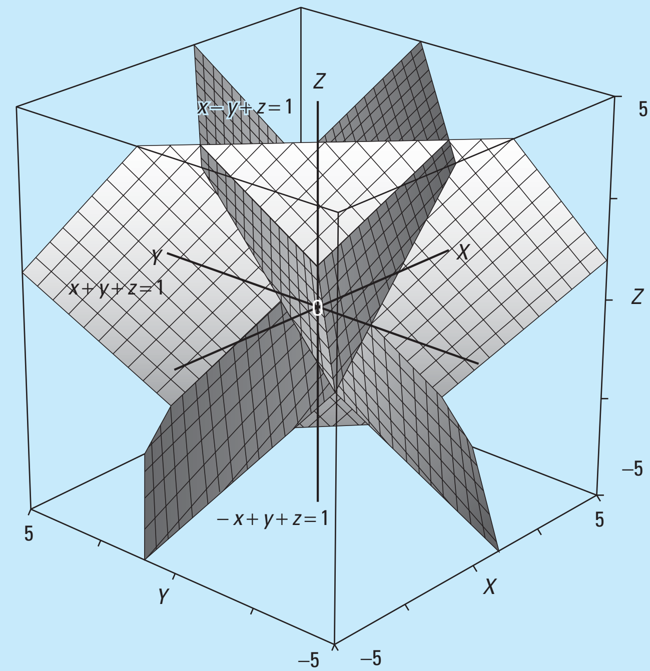
Figuur 1.8b **Een onafhankelijk stelsel** (Een unieke oplossing)



Figuur 1.8c **Een strijdig stelsel** (Geen enkele oplossing)



Figuur 1.9 **Onafhankelijk stelsel van drie lineaire vergelijkingen**



SAMENVATTING

Uit de voorbeelden bij 'Uitleg' en de bijbehorende vraagstukken blijkt, dat de samenvatting over het oplossen van een stelsel vergelijkingen aangevuld moet worden. Hierbij moet worden opgemerkt dat in het stelsel vergelijkingen zoals hier wordt opgelost, het aantal vergelijkingen steeds gelijk is aan het aantal onbekenden.

Om een *stelsel van meer dan twee vergelijkingen* met de eliminatiemethode op te kunnen lossen, moet het stelsel herleid worden tot een stelsel waarin twee vergelijkingen zitten met twee onbekenden.

Strijdig stelsel

Een *strijdig stelsel* vergelijkingen is een stelsel met vergelijkingen waarvan één der vergelijkingen in tegenspraak is met een andere vergelijking; het stelsel heeft geen oplossingen.

Identiek
Afhankelijk

Een *stelsel identieke* of *afhankelijke vergelijkingen* is een stelsel waarvan één der vergelijkingen een veelvoud is van de andere vergelijking; het stelsel heeft oneindig veel oplossingen.

Een stelsel vergelijkingen waarbij in één der vergelijkingen de ene variabele al uitgedrukt is in de andere, wordt het makkelijkst opgelost met de substitutiemethode.

VRAAGSTUKKEN

1.24 Los p en q op uit het volgend stelsel van vergelijkingen met de eliminatiemethode.

$$\begin{cases} 3p - 4q = 8 \\ 4p + 3q = \frac{1}{4} \end{cases}$$

1.25 Los x en y op uit het volgende stelsel van vergelijkingen.

$$\begin{cases} -2y + 3x = 2 \\ x = y + \frac{5}{6} \end{cases}$$

1.26 Los a, b en c op uit het volgende stelsel van vergelijkingen.

$$\begin{cases} a + b + c = 1 \\ \phantom{a + {}} b + 2c = 2 \\ a + c = 3 \end{cases}$$

1.27 Laat zien dat het volgende stelsel strijdig is.

$$\begin{cases} -a - b + c = 10 \\ a + 2b - 2c = 1 \\ 2a + 5b - 5c = 6 \end{cases}$$

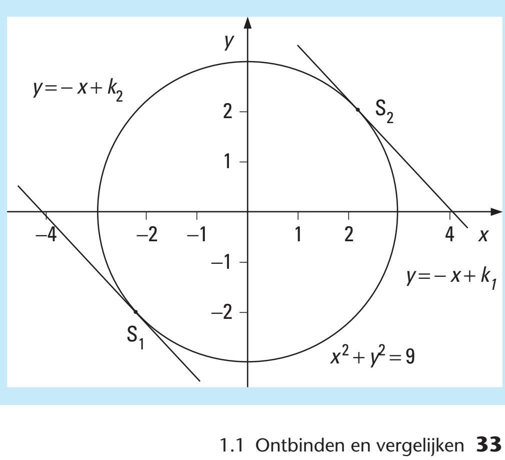
1.28 Een bedrijf heeft voor bedrijfswerkzaamheden een vrachtauto nodig. Het twijfelt tussen huren (leasen) of kopen. Bij het kopen van een vrachtauto worden de kosten bepaald door de vaste lasten en door een vast bedrag per verreden km. Bij leasen worden de kosten slechts bepaald door een vast bedrag per km. De kostenvergelijking in het geval van zelf aanschaffen van een vrachtauto is $k = 20\,000 + 1\frac{1}{2}p$. De kostenvergelijking voor het leasen van een vrachtauto is $k = 3p$. Bereken wanneer het aanschaffen van een vrachtauto voordeliger is.

1.29 Iemand erft een bedrag van €25.000. Het geld wordt belegd in drie beursgenoteerde bedrijven A, B en C. Na een jaar bedraagt het totaal uitgekeerde dividend €1620. Bedrijf A keerde 6% dividend uit, bedrijf B 7% en bedrijf C 8%. Er was €6000 meer geïnvesteerd in bedrijf B dan in C.
Bepaal de hoogte van de drie verschillende investeringen.

Als het aantal vergelijkingen groot is of de coëfficiënten aanleiding geven tot lastig rekenwerk, biedt de computeralgebra uitkomst.

1.30 In figuur 1.10 is de grafiek getekend van de cirkel met vergelijking $x^2 + y^2 = 9$. De lijnen met vergelijking $y = -x + k$ raken aan de cirkel in de punten S_1 en S_2. De coördinaten van de punten S_1 en S_2 moeten dus voldoen aan beide vergelijkingen. Ga voor de bepaling van de coördinaten als volgt te werk:

Figuur 1.10 **Cirkel met vergelijking $x^2 + y^2 = 9$**



a Het bepalen van een snijpunt S van de lijn $y = -x + k$ en de cirkel $x^2 + y^2 = 9$ komt neer op het oplossen van het stelsel vergelijkingen

$$\begin{cases} y = -x + k \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases}$$

Subsitueer daartoe $y = -x + k$ in de vergelijking $x^2 + y^2 = 9$.

b Voor zekere waarde van k heeft de lijn slechts één snijpunt met de cirkel. Van de in **a** verkregen vkv in x moet de discriminant dus gelijk zijn aan nul. Bereken k.

c Bereken nu met het stelsel van vergelijkingen de coördinaten van S_1 en S_2.

Eindtoets

1 Bereken met behulp van merkwaardige producten:

a $(0{,}2 - x)(0{,}2 + x)$

b $(4x + 7y)^2$

c $(a - 4)(a + 4)(a^2 + 16)$

d $(5 + 2p)(5 - 2p)(25 - 4p^2)$

e $(4x + 3)(x - 5)$

f $(t^3 - 6)^2$

2 Ontbind, indien van toepassing, zo ver mogelijk in factoren:

a $x^2 - 15x + 26$

b $y^4 - 64y^2$

c $49t^2 - 14t + 1$

d $9a^7b + 12a^6b^2 + 4a^5b^3$ $(= a^5b(\ldots))$

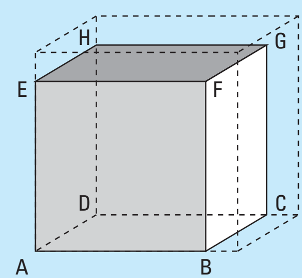
e $2x^2 - 3x - 5$

3 In figuur 1.11 is een kubus getekend ABCD.EFGH. De lengte van de ribben is 7 m.

a Bereken met merkwaardige producten hoeveel groter de inhoud wordt als alle ribben evenwijdig met AB of AE 5 mm langer worden.

b Hoeveel groter wordt de inhoud als *alle* ribben 5 mm langer worden?

Figuur 1.11 **Kubus ABCD.EFGH**



4 Los de volgende vergelijkingen op.

a $6x^2 + 5x - 6 = 0$

b $p^2 - 24p + 225 = 0$

c $s^2 - 11s + 32 = 0$

d $t^2 - 11t + 30 = 0$

e $y^2 - 11y + 25 = 0$

f $q^2 - 11q + 30\frac{1}{4} = 0$

5 Toon aan dat de vkv $x^2 - (2k + 3)x + 3k = 0$ altijd twee verschillende oplossingen heeft.

6 Van een rechthoek is de omtrek 74 cm. De oppervlakte van de rechthoek is gelijk aan 300 cm^2. Bereken de lengte en de breedte van deze rechthoek.

7 Een bedrijf in zoetwaren mengt N&N's van €2 per pond met soortgelijke snoepjes van een onbekend merk. Het onbekende merk kost €1,50 per pond.
Men verpakt het mengsel in zakken van 25 kilo. Per pond kost het mengsel €1,80.
Hoeveel kilo moet men in dit geval van elk mengen?

8 Een getal van drie cijfers is gelijk aan vijftien keer de som van zijn cijfers. Als de cijfers van het getal in omgekeerde volgorde worden geplaatst, dan is het nieuwe getal 396 groter dan het oorspronkelijke getal. Ten slotte is het laatste cijfer één groter dan de som van de andere twee.
Over welk getal hebben we het hier?

9 Los de volgende stelsels vergelijkingen op.

a $\begin{cases} 2x - 3y = -1 \\ 2y - 6x - 10 = 0 \end{cases}$

b $\begin{cases} 2x - 3y + 5z = 19 \\ 5y - z = 5 \\ x + y + z = 7 \end{cases}$

10 Een bedrijf is aan een nieuwe printer toe. Tot nu toe heeft men naar grote tevredenheid de HP 660 gebruikt. Als alternatief wordt de HP 720C aangeboden. Men moet een besluit nemen op grond van de volgende gegevens:

- De printers worden in 3 jaar afgeschreven;
- Per jaar worden zo'n 40 kleurafdrukken gemaakt;
- Verder gelden de prijzen uit tabel 1.2.

Bij welk aantal zwart-wit-afdrukken is de HP 660 goedkoper dan de HP 720C?

Tabel 1.2

Type	**Prijs** (euro/stuk)	**Zwart-wit-afdruk** (cent/stuk)	**Kleurafdruk** (cent/stuk)
HP 660	179	12	110
HP 720C	274	8	90

11 $\begin{cases} 2y - 4x = 10 \\ 2x - y + 5 = 0 \end{cases}$

Geef aan welk antwoord juist is:

a Bovenstaand stelsel is strijdig.
b Bovenstaand stelsel is identiek.
c Bovenstaand stelsel heeft slechts als oplossingen $x = 1$ en $y = -2$

12 Gegeven de vkv $2x^2 + 8x + 11 = 0$. Geef aan welk antwoord juist is:

a De vkv heeft precies twee verschillende reële oplossingen.
b De vkv heeft precies twee dezelfde reële oplossingen.
c De vkv heeft geen reële oplossingen.

13 Twee schepen vertrekken gelijktijdig uit de haven van Kopenhagen. De vaarrichting van schip A is oost en van schip B zuid. De vaarsnelheid van schip A is een knoop meer dan die van schip B. Na een half uur varen bedraagt de afstand tussen de twee schepen 12,379 zeemijlen. Bereken de snelheid van elk schip in knopen. Rond het antwoord af op een geheel getal.

Aanwijzing: De *knoop* is een eenheid van snelheid die veel gebruikt wordt in de zeevaart en in de luchtvaart. Eén knoop is één zeemijl per uur. Eén zeemijl is 1852 meter. Een knoop is dus een snelheid van 0,514 m/s.

Leereenheid 1.2

Breuken bewerken

Deze leereenheid zal ongeveer 10 SBU's in beslag nemen.

In deze leereenheid ga je veel oefenen met het vereenvoudigen van breuken en met bewerkingen die je met breuken kunt uitvoeren. Een nieuw onderwerp is het begrip staartdeling: met de techniek van de staartdeling is het mogelijk een breuk met veeltermen in teller en noemer te vereenvoudigen. Bij gebroken vergelijkingen zul je vaardigheden die je bij het vereenvoudigen van – en bij bewerkingen met – breuken hebt opgedaan, goed kunnen gebruiken om de onbekende uit de vergelijking op te lossen.

Diagnostische toets

1 Schrijf de volgende breuken zo eenvoudig mogelijk:

a $\dfrac{x^2 - y^2}{x - y}$ **b** $\dfrac{(x + y) - (x - 2y)}{3x}$ **c** $\dfrac{\frac{a}{bc}}{abc}$

2 Voer de volgende bewerkingen met breuken uit en schrijf de resultaten zo eenvoudig mogelijk:

a $\dfrac{1}{1 - x} - \dfrac{1}{1 - x^2}$ **b** $\dfrac{1}{x - 10} - 1$ **c** $(a - b)^2 \cdot \dfrac{1}{a^2 - b^2}$

3 Voer de volgende staartdelingen uit:

a $\dfrac{x^5 + 2x^4 - 3x^3 + x^2 + 2x + 1}{x^2 + 3x}$ **b** $\dfrac{x^3 - x}{x + 2}$

4 Ontbind in factoren: $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

5 Los de volgende gebroken vergelijkingen op in $\mathbb{R}$:

a $\dfrac{x^2}{x - 4} = 1 + \dfrac{16}{x - 4}$ **b** $\dfrac{2}{x} - \dfrac{3}{x + 1} + \dfrac{1}{x - 1} = 0$

6 Gegeven de vergelijking $\dfrac{x^2}{x + 2} = 1$.

Bewering: deze vergelijking heeft precies twee oplossingen. De som van deze oplossingen is –1.
Is deze bewering juist?

7 Druk b uit in de overige grootheden: $\dfrac{c}{a - b} = \dfrac{d}{a - f}$

8 Gegeven is de betrekking: $P = \dfrac{M^2 \cdot H}{v \cdot (M + m) \cdot h}$

Druk m uit in de overige grootheden.

Praktijksituatie

Een fietser legt een afstand van 100 km 1 uur sneller af dan een andere fietser die 5 km/uur langzamer rijdt.
Met behulp van gebroken vergelijkingen kunnen we bepalen hoe groot de snelheid van de fietsers is geweest. Dat gaat als volgt:
De snelheden van de fietser stellen we v en $(v - 5)$ km/uur. We proberen nu uit de gegevens een betrekking af te leiden waarin v als onbekende voorkomt. We hebben het gegeven van het tijdverschil nog niet gebruikt. De tijd die de fietsers nodig hebben om de 100 km af te leggen is respectievelijk $\dfrac{100}{v}$ en $\dfrac{100}{v - 5}$.

Het tijdsverschil was 1 uur, dus geldt: $\dfrac{100}{v} + 1 = \dfrac{100}{v - 5}$.

Hieruit kunnen we v oplossen:

$$\frac{100}{v} + 1 = \frac{100}{v-5} \Leftrightarrow \frac{100+v}{v} = \frac{100}{v-5}$$
$$\Leftrightarrow (100+v)(v-5) = 100v$$
$$\Leftrightarrow v^2 + 95v - 500 = 100v$$
$$\Leftrightarrow v^2 - 5v - 500 = 0$$
$$\Leftrightarrow (v-25)(v+20) = 0$$
$$\Leftrightarrow v = 25 \quad \text{of} \quad v = -20 \quad \text{(voldoet niet)}$$

De gevraagde snelheden zijn dus 25 en 20 km/uur.

Opdracht **1** Controleer deze uitkomsten, door na te gaan dat bij een af te leggen traject van 100 km de ene fietser er één uur minder voor nodig heeft dan de andere fietser.

1.2.1 Rekenregels

UITLEG

In deze paragraaf herhalen we de mogelijke bewerkingen die we op breuken kunnen uitvoeren. Meestal hebben ze tot doel de betreffende breuk te vereenvoudigen.

Voorbeelden van bewerkingen die we op breuken mogen uitvoeren, zijn:

1 $-\frac{3}{4} = \frac{-3}{4}$, maar ook $-\frac{3}{4} = \frac{3}{-4}$

Een breuk met een minteken ervoor is dus op verschillende manieren te noteren: het minteken voor de volledige breuk of alleen voor de teller of alleen voor de noemer.

2 $\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 2}{4 \cdot 2} = \frac{6}{8}$, maar ook $\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot (-1)}{4 \cdot (-1)} = \frac{-3}{-4}$

In een breuk mogen teller en noemer met eenzelfde constante ($\neq 0$) worden vermenigvuldigd.

3 $\dfrac{2}{\frac{3}{4}} = 2 \cdot \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$

Delen door een breuk is hetzelfde als vermenigvuldigen met het omgekeerde van die breuk.

Opdracht **2** Bereken, zonder je zakrekenmachine te gebruiken:

a $\dfrac{50}{\frac{1}{4}}$

b $\dfrac{3}{\frac{1}{16}}$

c $\dfrac{10}{-\frac{1}{4}}$

d $\dfrac{-6}{3}$

e $\dfrac{1}{0{,}05}$

f $\dfrac{0{,}6}{0{,}3}$

g $\dfrac{1\frac{4}{7}}{\frac{3}{7}}$

h $\dfrac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}}$

UITLEG

De volgde twee voorbeelden illustreren hoe je een minteken in een breuk verwerkt:

1 $-\dfrac{3}{x} = \dfrac{-3}{x}$, maar ook: $-\dfrac{3}{x} = \dfrac{3}{-x}$

2 $-\dfrac{a-b}{x-y} = \dfrac{-(a-b)}{x+y} = \dfrac{-a+b}{x+y}$, maar ook $-\dfrac{a-b}{x+y} = \dfrac{a-b}{-(x+y)} = \dfrac{a-b}{-x-y}$

Opdrachten

3 Verwerk de mintekens in de volgende breuken:

a $-\dfrac{2}{a^2-1}$

b $-\dfrac{(x+y)(x-y)}{x^2+y^2}$

De volgende voorbeelden illustreren hoe we de teller en de noemer van een breuk met eenzelfde getal mogen vermenigvuldigen of door eenzelfde getal mogen delen, mits dit getal maar niet nul is.

1 $\dfrac{x}{y} = \dfrac{8x}{8y}$, maar ook $\dfrac{x}{y} = \dfrac{\frac{1}{2}x}{\frac{1}{2}y}$

2 $\dfrac{x^2-y^2}{(x+y)^2} = \dfrac{(x-y)(x+y)}{(x+y)(x+y)} = \dfrac{x-y}{x+y}$

4 Vereenvoudig de volgende breuken:

a $\dfrac{x^2+5x+6}{x^2+4x+4}$

b $\dfrac{x^2+5x}{x^2-25}$

In rekenregel 3 staat, dat breuken waarvan de noemer zelf ook weer een breuk is, kunnen worden vereenvoudigd door de teller te vermenigvuldigen met het omgekeerde van de noemer, zie de volgende voorbeelden.

1 $\dfrac{3}{\frac{7}{y}} = 3 \cdot \dfrac{y}{7} = \dfrac{3y}{7}$

2 $\dfrac{a-b}{\frac{c}{a+b}} = (a-b) \cdot \dfrac{a+b}{c} = \dfrac{(a-b)(a+b)}{c} = \dfrac{a^2-b^2}{c}$

Om de bewerkingen met breuken uit te voeren, moeten we ons houden aan de volgende rekenregels:

SAMENVATTING

Als je breuken moet vereenvoudigen, ontbind dan eerst, indien mogelijk, teller en noemer zoveel mogelijk in factoren.

Rekenregels

1 $-\dfrac{a}{b} = \dfrac{-a}{b} = \dfrac{a}{-b}$ $\quad (b \neq 0)$

2 $\dfrac{a}{b} = \dfrac{pa}{pb}$ $\quad (b \neq 0,\ p \neq 0)$

3 $\dfrac{a}{\frac{b}{c}} = a \cdot \dfrac{c}{b} = \dfrac{ac}{b}$ $\quad (b \neq 0,\ c \neq 0)$

VRAAGSTUKKEN

1.31 Schrijf de volgende breuken zo eenvoudig mogelijk:

a $\dfrac{a^3 - a}{a^2 - 1}$

b $\dfrac{x^2 + xy}{x + y}$

c $\dfrac{x - (x - y)}{y^2}$

d $\dfrac{x^3 - x^2y^2}{x^2 - xy^2}$

e $\dfrac{y^7 - xy^6}{y^5 + x^5y^7}$

f $\dfrac{a^2 + ab + a}{a}$

g $\dfrac{a^2 \cdot ab \cdot a}{a}$

h $\dfrac{a + ab}{a}$

i $\dfrac{ax \cdot ay}{az}$

1.32 Schrijf de volgende breuken zo eenvoudig mogelijk:

a $\dfrac{5x^4y^5z^2}{10x^3y^4z^4}$

b $\dfrac{-a^2(a - b)}{a(a - b)}$

c $\dfrac{a - a^3}{a^4 - 1}$

d $\begin{array}{c} b \\ \hline 1 \\ \hline a \end{array}$

e $\begin{array}{c} xy \\ \hline y \\ \hline 2 \end{array}$

f $\dfrac{(x - y) - (x - 3y)}{2x}$

g $\begin{array}{c} x - y \\ \hline 1 \\ \hline x + y \end{array}$

h $\dfrac{ab + bc}{b}$

i $\begin{array}{c} 2 \\ \hline 3 \\ \hline x \end{array}$

j $\dfrac{abc}{\frac{bc}{a}}$

k $\dfrac{\frac{abc}{bc}}{a}$

1.2.2 Rekenkundige bewerkingen met breuken

UITLEG

Je kunt breuken bij elkaar optellen of van elkaar aftrekken als de noemers gelijk zijn (gelijknamig zijn), dus bijvoorbeeld:

$$\frac{1}{4} + \frac{2}{4} = \frac{3}{4} \text{ en } \frac{2}{7} + \frac{3}{7} = \frac{5}{7}$$

Breuken met verschillende noemers moeten we eerst gelijknamig maken, bijvoorbeeld:

$$\frac{1}{4} + \frac{2}{3} = \frac{1 \cdot 3}{4 \cdot 3} + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 4} = \frac{3}{12} + \frac{8}{12} = \frac{11}{12}$$

en

$$\begin{aligned} \frac{3}{4} + \frac{5}{6} &= \frac{3}{2 \cdot 2} + \frac{5}{2 \cdot 3} \\ &= \frac{3 \cdot 3}{2 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{5 \cdot 2}{2 \cdot 2 \cdot 3} \\ &= \frac{9}{12} + \frac{10}{12} \\ &= \frac{19}{12} \end{aligned}$$

In het laatste voorbeeld hebben we de noemer eerst ontbonden in factoren om vervolgens de 'meest zuinige' noemer te kunnen bepalen.

Iets gecompliceerder ligt het in het volgende voorbeeld:

$$\tfrac{1}{12} + \tfrac{5}{8} + \tfrac{1}{6} = \frac{1}{2^2 \cdot 3} + \frac{5}{2^3} + \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{2}{2^3 \cdot 3} + \frac{5 \cdot 3}{2^3 \cdot 3} + \frac{2^2}{2^3 \cdot 3} = \tfrac{19}{24}$$

Ook hier hebben we de noemers van de breuken zoveel mogelijk ontbonden in factoren. Vervolgens is eenvoudig in te zien dat de 'zuinigste' noemer $2^3 \cdot 3$ is.

Opdracht **5** Tel de volgende breuken met een zo zuinig mogelijke gemeenschappelijke noemer op:

a $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$

b $\frac{1}{2} + \frac{2}{7}$

c $\frac{3}{8} + \frac{5}{12}$

d $\frac{2}{5} + \frac{4}{15} - \frac{1}{9}$

e $\frac{3}{4} - \frac{1}{10} + \frac{4}{15}$

Hoe we breuken met elkaar moeten vermenigvuldigen zien we in de volgende voorbeelden:

$\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} = \frac{15}{24}$, $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{10}$ en $1\frac{1}{6} \cdot \frac{3}{8} = \frac{7}{6} \cdot \frac{3}{8} = \frac{21}{48}$

Dus als we twee breuken met elkaar vermenigvuldigen, vermenigvuldigen we de tellers met elkaar en de noemers met elkaar. Dat delen door een breuk hetzelfde is als vermenigvuldigen met het omgekeerde van die breuk, zien we nog in het volgende voorbeeld:

$$\frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{6}} = \frac{3}{4} \cdot \frac{6}{5} = \frac{18}{20} = \frac{9}{10}$$

De breuken $\dfrac{5}{8a}, \dfrac{1}{6b}$ en $\dfrac{5}{12a^2b}$ gaan we dus op de volgende manier optellen:

$$\begin{aligned}
\frac{5}{8a} + \frac{1}{6b} + \frac{5}{12a^2b} &= \frac{5}{2^3a} + \frac{1}{2 \cdot 3b} + \frac{5}{2^2 \cdot 3a^2b} \\
&= \frac{5}{2^3a} \cdot \frac{3ab}{3ab} + \frac{1}{2 \cdot 3b} \cdot \frac{2^2a^2}{2^2a^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3a^2b} \cdot \frac{2}{2} \\
&= \frac{15ab}{24a^2b} + \frac{4a^2}{24a^2b} + \frac{10}{24a^2b} \\
&= \frac{15ab + 4a^2 + 10}{24a^2b}
\end{aligned}$$

Om de breuken $\dfrac{3}{x^2 - 3x + 2}$ en $\dfrac{5}{x^2 + 4x - 5}$ van elkaar af te trekken, gaan we als volgt te werk:

$$\frac{3}{x^2-3x+2}-\frac{5}{x^2+4x-5}=\frac{3}{(x-1)(x-2)}-\frac{5}{(x-1)(x+5)}$$
$$=\frac{3(x+5)}{(x-1)(x-2)(x+5)}-\frac{5(x-2)}{(x-1)(x-2)(x+5)}$$
$$=\frac{3(x+5)-5(x-2)}{(x-1)(x-2)(x+5)}$$
$$=\frac{-2x+25}{(x-1)(x-2)(x+5)}$$

Opdracht

6 Voer de volgende bewerkingen met breuken uit:

a $\frac{1}{ac}+\frac{2}{a}$

b $a+\frac{1}{a}$

c $\frac{2}{a}-\frac{1}{x}$

d $\frac{1}{3a^2b}+\frac{1}{4ab^2}+\frac{1}{5b^3}$

e $\frac{1}{9(x-y)^2}+\frac{1}{30(x-y)(x+y)^2}+\frac{1}{18(x-y)^3(x+y)}$

f $\frac{1}{x(x-1)}+\frac{2}{x^2-1}$

SAMENVATTING

Voor de rekenkundige bewerkingen optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen gelden de volgende rekenregels, nu uitgedrukt in letters:

Rekenregels

4 Optellen/aftrekken: $\frac{a}{c}\pm\frac{b}{d}=\frac{ad}{cd}\pm\frac{bc}{cd}=\frac{ad\pm bc}{cd}$ $\quad(c\neq 0, d\neq 0)$

5 Vermenigvuldigen: $\frac{a}{c}\cdot\frac{b}{d}=\frac{ab}{cd}$ $\quad(c\neq 0, d\neq 0)$

6 Delen: $\dfrac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{d}}=\frac{a}{c}\cdot\frac{d}{b}=\frac{ad}{bc}$ $\quad(b\neq 0,\ c\neq 0,\ d\neq 0)$

VRAAGSTUKKEN

1.33 De school van Janneke telt 900 leerlingen. Van deze leerlingen gaat $\frac{13}{18}$ met de fiets en $\frac{2}{9}$ komt met de bus.

a Bereken hoeveel leerlingen er met de fiets komen.

b Bereken hoeveel leerlingen er met de bus komen.

1.34 Piet, Karel en Dinie moeten 456 reclamefolders rondbrengen.
Piet doet 1/3 deel van de folders en Karel doet 3/8 deel.
Bereken hoeveel folders ze elk rondbrengen.

1.35 Een vliegtuig vertrekt met een volle tank en vliegt 1350 kilometer.
Tijdens die vlucht verbruikt het 5/11 deel van zijn brandstof.
Bereken hoeveel kilometer het vliegtuig nog verder kan vliegen zonder bij te tanken.

1.36 Voer de volgende bewerkingen met breuken uit en schrijf de resultaten zo eenvoudig mogelijk:

a $\frac{a+c}{c^2}-\frac{1}{c}$

b $\frac{1}{4(1-x)}-\frac{1}{8(1-x^2)}$

c $\frac{a}{a-b}+\frac{ab}{(b-a)^2}$

d $5-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{1-x}$

e $\frac{1}{a^2b}+\frac{1}{ab^2}$

f $\frac{1}{x}-1$

1.37 Voer de volgende bewerkingen met breuken uit en schrijf de resultaten zo eenvoudig mogelijk:

a $\dfrac{3x^2y}{z^2} \cdot \left(\dfrac{2z}{xy}\right)^2 \cdot \dfrac{x}{yz}$

b $x - \dfrac{x}{x+1}$

c $\dfrac{a}{a+b} + \dfrac{a}{a-b}$

d $\dfrac{1}{x^2-x} - \dfrac{1}{x^2-1}$

e $\dfrac{t^2}{t-2} + \dfrac{4}{2-t}$

f $\dfrac{1}{x^2-3x+2} - \dfrac{1}{x^2-7x+6}$

g $\dfrac{1}{x^2-x} - x$

1.38 Voer de volgende bewerkingen met breuken uit en schrijf de resultaten zo eenvoudig mogelijk:

a $\dfrac{y^2-xy}{x^2-xy} \cdot \dfrac{x^2+xy}{y^2+xy}$

b $\dfrac{x^2+xy+xz}{y^2+xy-yz} \cdot \dfrac{xz+yz-z^2}{y^2+xy+yz}$

c $\dfrac{5a+25}{a^2+2a-15} - \dfrac{6a-24}{a^2-6a+8} + \dfrac{7a-21}{a^2-5a+6}$

1.2.3 Staartdelingen

UITLEG

Uit de rekenkunde kennen we het begrip staartdeling om breuken te vereenvoudigen. We kunnen de breuk $\frac{32\,617}{12}$ als volgt vereenvoudigen.

Staartdeling

$$
\begin{array}{r|r|l r}
12 & 32\,617 & & \\
 & 24\,000 & & 2\,000\times \\
\cline{2-2}
 & 8\,617 & & \\
 & 8\,400 & & 700\times \\
\cline{2-2}
 & 217 & & \\
 & 120 & & 10\times \\
\cline{2-2}
 & 97 & & \\
 & 96 & & 8\times \\
\cline{2-2} \cline{4-4}
 & 1 & & 2\,718 \; +
\end{array}
$$

Kijkend naar de omvang van de teller zoeken we eerst naar het aantal duizendtallen van 12 dat we van de teller kunnen afhalen, vervolgens naar het aantal honderdtallen van 12 enzovoort. De optelling van de duizendtallen, honderdtallen, tientallen en eenheden is het aantal keren dat 12 deelbaar is op 32 617. Als rest blijft 1 over.

Conclusie: $\frac{32\,617}{12} = 2\,718 + \frac{1}{12}$ (de rest die overblijft moet weer gedeeld worden door 12) $= 2\,718\frac{1}{12}$

Opdrachten

7 Controleer bovenstaand resultaat door uit te rekenen hoe groot $12 \cdot 2\,718\frac{1}{12}$ is.

We bekijken nog een voorbeeld: $\frac{516\,232}{8}$

$$
\begin{array}{r|r|rl}
8 & 516\,232 & & \\
 & 480\,000 & 60\,000\times & \\
\cline{2-2}
 & 36\,232 & & \\
 & 32\,000 & 4\,000\times & \\
\cline{2-2}
 & 4\,232 & & \\
 & 4\,000 & 500\times & \\
\cline{2-2}
 & 232 & & \\
 & 160 & 20\times & \\
\cline{2-2}
 & 72 & & \\
 & 72 & 9\times & \\
\cline{2-3}
 & 0 & 64\,529 & +
\end{array}
$$

Opgaande deling

Conclusie: Dit is een zogenoemde opgaande deling met rest 0, dus $\frac{516\,232}{8} = 64\,529$

8 Bereken met behulp van een staartdeling:

a $\frac{34\,564}{11}$

b $\frac{253\,768}{14}$

Ook breuken met veeltermen kunnen we aanpakken met een staartdeling. De werkwijze van zo'n deling verschilt in wezen niet van de werkwijze bij een 'gewone' staartdeling. Alleen moeten we nu steeds een macht van x zien te vinden die vermenigvuldigd met de deler (= noemer) de (overblijvende) hoogste macht van x van de teller doet verdwijnen.

Bepaal: $\dfrac{2x^3 - 5x^2 + 7x - 4}{x - 1}$

Oplossing:

$$
\begin{array}{r|l|l}
x - 1 & 2x^3 - 5x^2 + 7x - 4 & 2x^2 - 3x + 4 \\
 & 2x^3 - 2x^2 & \\
\cline{2-2}
 & \quad -3x^2 + 7x \quad - & \\
 & \quad -3x^2 + 3x & \\
\cline{2-2}
 & \qquad\qquad 4x - 4 \quad - & \\
 & \qquad\qquad 4x - 4 & \\
\cline{2-2}
 & \qquad\qquad\quad 0 \quad - &
\end{array}
$$

De oplossing is dus:

$$\frac{2x^3 - 5x^2 + 7x - 4}{x - 1} = 2x^2 - 3x + 4$$

Ook dit is een voorbeeld van een opgaande deling.

Opdracht **9** Controleer het resultaat van bovenstaand voorbeeld door $(x - 1)(2x^2 - 3x + 4)$ uit te rekenen.

Bepaal: $\dfrac{-4x^4 + x^3 - 5x^2 + 6}{2x^2 + 1}$

Oplossing:

$$\begin{array}{l|llll|l}
2x^2 + 1 & -4x^4 & + x^3 & - 5x^2 & + 6 & -2x^2 + 0{,}5x - 1{,}5 \\
 & -4x^4 & & - 2x^2 & & \\
\cline{2-4}
 & & x^3 & - 3x^2 & & \\
 & & x^3 & + 0{,}5x & & \\
\cline{3-4}
 & & & -3x^2 - 0{,}5x & + 6 & \\
 & & & -3x^2 & - 1{,}5 & \\
\cline{4-5}
 & & & - 0{,}5x & + 7{,}5 &
\end{array}$$

De oplossing is nu:

$$\frac{-4x^4 + x^3 - 5x^2 + 6}{2x^2 + 1} = -2x^2 + 0{,}5x - 1{,}5 + \frac{-0{,}5x + 7{,}5}{2x^2 + 1}$$

Niet-opgaande deling Dit is een niet-opgaande deling: een deling waarbij de rest niet gelijk is aan nul. Het overblijvende deel (hier: $-0{,}5x^2 + 7{,}5$) wordt als breuk aan het resultaat toegevoegd $\left(\text{hier: } \dfrac{-0{,}5x^2 + 7{,}5}{2x^2 + 1}\right)$

Deze voorbeelden leiden tot de volgende algemene aanpak.

Om een breuk met veeltermen met behulp van een staartdeling te vereenvoudigen, gebruiken we de volgende methode:

1 Sorteer de veeltermen in de teller en in de noemer naar de hoogste macht.
2 Gebruik lege ruimten voor niet-voorkomende machten.
3 Bepaal de macht van x waarmee de deler (= noemer) moet worden vermenigvuldigd, zodat de hoogste macht van x van de teller verdwijnt als we het verschil bepalen.
4 Bepaal het verschil.
5 Herhaal de stappen 3 en 4 totdat de graad van het verschil kleiner is dan de graad van de deler. Dit is dan de rest van de deling.

Opdracht **10** Bepaal met een staartdeling:

a $\dfrac{x^5 - x^4 + 6x^3 - 6x^2 + x - 1}{x - 1}$

b $\dfrac{x^5 + 2x^4 - 2x^2 - 6}{x^2 + x}$

c $\dfrac{x^4 - 1}{x - 1}$

UITLEG

1 Bij het ontbinden in factoren van veeltermen kunnen we heel goed gebruikmaken van een staartdeling. Bijvoorbeeld is gegeven dat de veelterm $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ te ontbinden is in factoren. Om deze ontbinding te maken, zoeken we een nulpunt van $f(x)$. Na enig zoekwerk zien we dat $x = 1$ een nulpunt van $f(x)$ is. Dit betekent dat in de ontbinding van $f(x)$ de factor $(x - 1)$ moet voorkomen, ofwel:

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x - 1)(\ldots)$$

De ontbrekende factor bepalen we met de staartdeling $\dfrac{x^3 - 2x^2 - 5x + 6}{x - 1}$:

$$\begin{array}{llllll}
x - 1 \;/ & x^3 & - 2x^2 & - 5x & + 6 \;\backslash\; x^2 - x - 6 & \\
 & x^3 & - x^2 & & & \\
\hline
 & & - x^2 & - 5x & & - \\
 & & - x^2 & + x & & \\
\hline
 & & & - 6x & + 6 & - \\
 & & & - 6x & + 6 & \\
\hline
 & & & & 0 & -
\end{array}$$

Dus we kunnen schrijven: $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x - 1)(x^2 - x - 6)$.
Als we de factor $x^2 - x - 6$ verder ontbinden, krijgen we
$f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x - 1)(x + 2)(x - 3)$

2 Als tweede voorbeeld ontbinden we de veelterm $f(x) = x^3 + 4x^2 - 7x - 10$. Eén van de nulpunten van $f(x)$ is $x = -1$, dus $x^3 + 4x^2 - 7x - 10$ bevat de factor $(x + 1)$.
Met een staartdeling vinden we:

$$\begin{array}{llllll}
x + 1 \;/ & x^3 & + 4x^2 & - 7x & - 10 \;\backslash\; x^2 + 3x - 10 & \\
 & x^3 & + x^2 & & & \\
\hline
 & & 3x^2 & - 7x & & - \\
 & & 3x^2 & + 3x & & \\
\hline
 & & & - 10x & - 10 & - \\
 & & & - 10x & - 10 & \\
\hline
 & & & & 0 & -
\end{array}$$

Dus: $x^3 + 4x^2 - 7x - 10 = (x + 1)(x^2 + 3x - 10)$.
Ten slotte ontbinden we nog $x^2 + 3x - 10$ in $(x + 5)(x - 2)$, zodat het eindresultaat wordt:

$$x^3 + 4x^2 - 7x - 10 = (x + 1)(x + 5)(x - 2)$$

SAMENVATTING

Bij het ontbinden in factoren van een hogeregraadsveelterm is de volgende methode te gebruiken:
1 Bepaal één of meer nulpunten door uitproberen.
2 Breng deze nulpunten onder in factoren.
3 Spoor de resterende factoren op door middel van een staartdeling of door verdere ontbinding.

VRAAGSTUKKEN

1.39 Bepaal met een staartdeling:

a $\dfrac{x^6 - 3x^4 + 2x^2 - 6}{x^2 - x - 1}$ **b** $\dfrac{x^4 - 1}{x + 1}$ **c** $\dfrac{x^3 - 8x^2 + 17x - 10}{x^2 - 3x + 2}$

1.40 Ontbind zo ver mogelijk in factoren:

a $2x^3 + 5x^2 - 3$ **c** $x^3 - 1$
b $x^4 + x^3 - 9x^2 + 11x - 4$ **d** $x^4 - 1$

1.2.4 Gebroken vergelijkingen

UITLEG

Gebroken vergelijkingen
Kruislings vermenigvuldigen

Uit paragraaf 1.2.1 weten we dat bijvoorbeeld $\frac{3}{8} = \frac{6}{16}$. Deze gelijkenis vinden we terug in $3 \cdot 16 = 6 \cdot 8$. Deze bewerking noemen we 'kruislings vermenigvuldigen'. Bij het oplossen van gebroken vergelijkingen (dit zijn vergelijkingen met breuken, waarbij de onbekende in de noemer voorkomt) is 'kruislings vermenigvuldigen' een handig hulpmiddel, zoals uit het volgende blijkt:

Uit: $\dfrac{x + 2}{x - 1} = \frac{1}{2}$ volgt: $2x + 4 = x - 1$ en $x \neq 1$, zodat $x = -5$.

Als in een vergelijking met breuken de onbekende ook in de noemer van een breuk voorkomt, spreken we van een gebroken vergelijking.

Opdracht **11** Los op in $\mathbb{R}$: $\dfrac{x + 3}{x - 4} = \frac{1}{3}$

We willen de volgende gebroken vergelijking oplossen:

$$\frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{3x^2 + 2x}{x^2}$$

Oplossing:
Om na het kruislings vermenigvuldigen een zo eenvoudig mogelijke vergelijking over te houden, vereenvoudigen we linker- en rechterlid eerst zoveel mogelijk. Daartoe worden de beide tellers en noemers eerst zoveel mogelijk ontbonden in factoren:

$$\frac{x^2-4}{x-2}=\frac{3x^2+2x}{x^2} \Leftrightarrow \frac{(x+2)(x-2)}{x-2}=\frac{x(3x+2)}{x^2}$$

$$\Leftrightarrow x+2=\frac{3x+2}{x} \qquad \text{en } x \neq 2 \text{ en } x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x^2+2x=3x+2 \qquad \text{en } x \neq 2 \text{ en } x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x^2-x-2=0 \qquad \text{en } x \neq 2 \text{ en } x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x-2)=0 \qquad \text{en } x \neq 2 \text{ en } x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x=-1 \text{ is de enige oplossing.}$$

2 Los op in $\mathbb{R}$: $\frac{1}{x-1}+\frac{5}{x-2}=\frac{4}{1-x}$

Oplossing:

$$\frac{1}{x-1}+\frac{5}{x-2}=\frac{4}{1-x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-2}{(x-1)(x-2)}+\frac{5(x-1)}{(x-2)(x-1)}=\frac{4}{1-x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-2+5(x-1)}{(x-1)(x-2)}=\frac{4}{1-x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{6x-7}{(x-1)(x-2)}=\frac{4}{1-x}$$

$$\Leftrightarrow (6x-7)(1-x)=4(x-1)(x-2) \qquad \text{en } x \neq 1 \text{ en } x \neq 2$$

$$\Leftrightarrow -6x^2+13x-7=4x^2-12x+8 \qquad \text{en } x \neq 1 \text{ en } x \neq 2$$

$$\Leftrightarrow 10x^2-25x+15=0 \qquad \text{en } x \neq 1 \text{ en } x \neq 2$$

$$\Leftrightarrow 2x^2-5x+3=0 \qquad \text{en } x \neq 1 \text{ en } x \neq 2$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(2x-3)=0 \qquad \text{en } x \neq 1 \text{ en } x \neq 2$$

$$\Leftrightarrow x=\tfrac{3}{2}$$

3 Los op in $\mathbb{R}$: $\frac{x^2}{x-3}=1+\frac{9}{x-3}$

Oplossing:

$$\frac{x^2}{x-3}=1+\frac{9}{x-3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{x-3}=\frac{x-3}{x-3}+\frac{9}{x-3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{x-3} = \frac{x-3+9}{x-3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{x-3} = \frac{x+6}{x-3}$$

$\Leftrightarrow x^2 = x + 6$ en $x \neq 3$

$\Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0$ en $x \neq 3$

$\Leftrightarrow (x+2)(x-3) = 0$ en $x \neq 3$

$\Leftrightarrow x = -2$

4 Los op in $\mathbb{R}$: $\dfrac{x^2+6x+8}{x^2+4x+4} = \dfrac{2x-6}{x+2}$

Oplossing:

$$\frac{x^2+6x+8}{x^2+4x+4} = \frac{2x-6}{x+2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+2)(x+4)}{(x+2)^2} = \frac{2x-6}{x+2}$$

$\Leftrightarrow \dfrac{(x+4)}{(x+2)} = \dfrac{2x-6}{x+2}$ en $x \neq -2$

$\Leftrightarrow x + 4 = 2x - 6$ en $x \neq -2$

$\Leftrightarrow x = 10$

5 Druk a uit in c en b als: $ac = \dfrac{a}{b} - 1$

Oplossing:
We lossen in dit soort situaties a op uit de gegeven vergelijking, en wel als volgt:

$$ac = \frac{a}{b} - 1$$

$$\Leftrightarrow ac = \frac{a}{b} - \frac{b}{b}$$

$$\Leftrightarrow ac = \frac{a-b}{b}$$

$$\Leftrightarrow abc = a - b$$

$$\Leftrightarrow abc - a = -b$$

$$\Leftrightarrow a(bc-1) = -b$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{-b}{bc-1} = \frac{b}{1-bc}$$

Opdracht **12** Druk b uit in a en c als: $ac = \dfrac{a}{b} - 1$.

SAMENVATTING

De algemene oplossingsmethode voor een gebroken vergelijking luidt:

1 Ontbind de noemers van de breuken indien mogelijk in factoren.

2 Vereenvoudig de breuken in linker- en/of rechterlid van de vergelijking zoveel mogelijk.

3 Gebruik ten slotte de eigenschap:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc \quad \text{als} \quad b \neq 0 \text{ en } d \neq 0$$

We breiden de oplossingsmethode voor een gebroken vergelijking als volgt uit:

4 Voer eventuele bewerkingen met breuken in de linker- en/of rechterlid van de vergelijking uit, zodat linker- en rechterlid elk één breuk bevatten.

5 Als we in een vergelijking één grootheid moeten uitdrukken in alle andere grootheden, vatten we deze vergelijking op als een vergelijking waarin de gevraagde grootheid de onbekende is, en lossen dan de (gebroken) vergelijking op.

VRAAGSTUKKEN

1.41 Los de volgende gebroken vergelijking op in $\mathbb{R}$:

a $\dfrac{2x+1}{2x-1} + 1 = 0$

b $\dfrac{x-2}{x-1} + \dfrac{x-1}{x-2} = 2\frac{1}{2}$

c $\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-4} = 0$

d $\dfrac{x^2}{x+3} = \dfrac{9}{x+3}$

e $\dfrac{2}{x-1} + \dfrac{5}{x-2} = \dfrac{4}{1-x}$

f $\dfrac{x^2-1}{(x-1)^2} - \dfrac{2}{x-1} = \dfrac{x}{x+2}$

1.42 Druk in de volgende betrekkingen a uit in de overige grootheden:

a $\dfrac{c}{a} = 1 - b$

b $a - b = \dfrac{ac}{d}$

c $\dfrac{a}{bc} - \dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{c}$

1.43 Gegeven is de betrekking: $c = \dfrac{100\sqrt{R}}{m + \sqrt{R}}$

a Druk m uit in c en R.

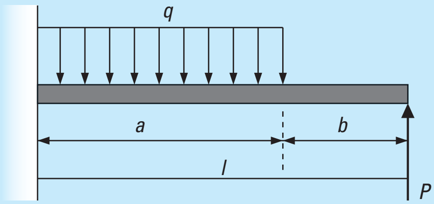
b Druk R uit in c en m.

1.44 Een leerling legt de 6 km van huis naar school altijd af in een bepaalde tijd. Op een dag gaat hij 4 minuten later van huis weg en moet 3 km/uur harder fietsen dan normaal om op tijd te komen. Hoe hard rijdt hij gewoonlijk?

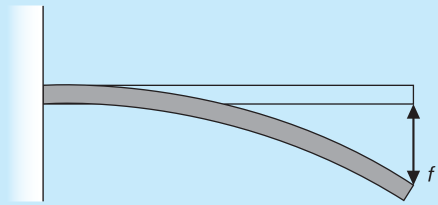
1.45 Gegeven een balk met lengte l die aan één zijde is ingeklemd. Op deze balk werken een gelijkmatige belasting q en een puntlast P, zie figuur 1.12. Door deze belasting ontstaat aan het uiteinde van de balk een zakking f, zie figuur 1.13.

$$f = \frac{q \cdot a^4}{8E \cdot I} + \frac{q \cdot a^3 \cdot b}{6E \cdot I} - \frac{P \cdot l^3}{3E \cdot I}$$

Figuur 1.12 **Balk met gelijkmatige belasting *q* en puntlast *P***



Figuur 1.13 **Door belasting ontstaat een zakking**



In voorgaande betrekking is E de elasticiteitsmodulus van het materiaal en I het oppervlaktetraagheidsmoment van de balkdoorsnede (E en I zijn dus constanten). Druk P uit in q en l als de zakking aan het uiteinde 0 is (dus $f = 0$) en de belasting zich uitstrekt tot het midden van de balk (dus $a = \frac{1}{2}l$).

1.46 Een lens met brandpuntsafstand f vormt van een voorwerp dat zich op een afstand v van de lens bevindt, een beeld dat zich op een afstand b aan de andere kant van de lens bevindt. Hiervoor geldt de lenzenformule:

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{v} = \frac{1}{f}$$

a Druk b uit in f en v.

b Bereken b als het voorwerp 3 meter van de lens is verwijderd. De lens heeft een brandpuntsafstand van 0,4 meter.

Eindtoets

1 Schrijf de volgende breuken zo eenvoudig mogelijk:

a $\dfrac{x^2 - xy}{y^2 - xy}$

b $\dfrac{y^2 - xy}{y^2 + xy}$

c $\dfrac{(x - y)^2 - x^2 + y}{xy}$

2 Voer de volgende bewerkingen met breuken uit en schrijf de resultaten zo eenvoudig mogelijk:

a $\dfrac{1}{(x - y)(y - z)} - \dfrac{1}{(y - z)(z - x)} + \dfrac{1}{(x - z)(x - y)}$

b $\dfrac{x^2 + 5x - 14}{x^2 + x - 6} + \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 2x - 3}$

c $\left(1 - \dfrac{x}{\sqrt{y}}\right)\left(\dfrac{1}{x - \sqrt{y}}\right)$

3 Bepaal met een staartdeling: $\dfrac{2x^3 - 9x^2 - 32x - 21}{x - 7}$

4 Ontbind in factoren: $x^3 + 5x^2 - 12x - 4$

5 Los de volgende vergelijkingen op in $\mathbb{R}$:

a $\dfrac{x + 1}{x - 1} - \dfrac{x - 1}{x + 1} = 0$

b $\dfrac{(4x - 3)(x + 1)}{4x^2 + x - 3} = 1$

6 Gegeven de vergelijking $\dfrac{x^2}{x - 5} + 4 = \dfrac{25}{x - 5}$.

Bewering: deze vergelijking heeft precies twee oplossingen. De som van deze oplossingen is –4.
Is deze bewering juist?

7 Druk a uit in de overige grootheden:

$$\frac{c}{a - b} = \frac{d}{a - f}$$

8 Gegeven is de betrekking:

$$P = \frac{M^2 \cdot H}{v \cdot (M + m) \cdot h}$$

Druk h uit in de overige grootheden.

Leereenheid 1.3

Machten nemen

Het geschatte aantal SBU's voor deze leereenheid bedraagt 10 uur.

In deze leereenheid wordt geoefend met machten. Het komt vaak voor in de wiskunde dat er herhaald vermenigvuldigd wordt met of gedeeld wordt door hetzelfde getal. Daarvoor bestaat dan een verkorte notatie, de macht van dat getal. De leereenheid wordt onderverdeeld in:

- Rekenregels voor machten met een gehele exponent.
- Machten met een negatieve en gebroken exponent.
- De wortel uit een getal.

Om deze leereenheid te kunnen uitvoeren, moet je de volgende regels kunnen toepassen: $(-a) \cdot (-a) = +a^2$, $(-a) \cdot +a = -a^2$, $+a \cdot +a = +a^2$ en (het vermenigvuldigen van breuken) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$; raadpleeg zonodig leereenheid 1.2, paragraaf 1.2.2.

Diagnostische toets

1 Herleid en schrijf zonder oneigenlijke machten:

a $(a^{-3}b^4c^{-1})^2 \cdot (a^4b^{-2}c^{-1})^{-1} =$

b $\dfrac{4 \cdot 10^2 \cdot 5 \cdot (10^{-2})^3}{8 \cdot (10^3 \cdot 10^{-5})^4} =$

c $\dfrac{(3a^{-2}b^{-8}) \cdot (a^0\text{b}^{-3})^{-2}}{(a^{-1}b^0c^2)^{-4}} =$

2 Herleid tot een oneigenlijke macht:

a $\sqrt[7]{a^5} =$

b $a^2 \cdot \sqrt[4]{a^3} =$

c $a \cdot \sqrt[3]{a} =$

d $\dfrac{1}{a^2 \cdot \sqrt{a}} =$

e $\dfrac{1}{a^3 \cdot \sqrt[5]{a}} \cdot \dfrac{1}{a^4 \cdot \sqrt[5]{a^4}} =$

f $\dfrac{\sqrt[15]{b^4}}{\sqrt[3]{b^2} \cdot \sqrt[5]{b^3}} =$

3 Bereken $y = 5^{x+1} - 3 \cdot 5^x - 3 \cdot 5^{x-1}$ als:

a $x = 0$

b $x = 1$

c $x = 2$

4 Schrijf zo eenvoudig mogelijk: $\sqrt[4]{\dfrac{625a^{20}b^{-12}}{81(a^2b^{-3})^{-12}}}$

5 Hoeveel is $12\frac{1}{2}$% van 2^{-20}?

6 Herleid en schrijf zonder oneigenlijke macht indien van toepassing:

a $\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{9} =$

b $a\sqrt{a} \cdot a^3 \cdot \sqrt{a} =$

c $p^2 \cdot \sqrt[5]{p^3} \cdot p \cdot \sqrt[5]{p^2} =$

d $\dfrac{b^3 \cdot \sqrt[4]{b^3}}{b^5 \cdot \sqrt[6]{b^5}} =$

e $\dfrac{t^2 \cdot \sqrt[3]{t}}{\sqrt[5]{t^3}} \cdot \dfrac{t\sqrt{t}}{t^3 \cdot \sqrt[6]{t^5}} =$

7 Hieronder staat een aantal beweringen. Welke beweringen zijn niet waar?

a $\dfrac{3}{\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

b $\sqrt[4]{5} \cdot \sqrt[4]{7} = \sqrt[8]{35}$

c $\sqrt[3]{162} = 3 \cdot \sqrt[3]{6}$

d $\dfrac{\sqrt[5]{3^4}}{\sqrt[10]{3^3}} = \sqrt{3}$

8 a Maak een schatting van de volgende berekening door gebruik te maken van de wetenschappelijke notatie.

$\dfrac{98\,200 \cdot 0{,}000\,435}{0{,}52 \cdot 0{,}000\,12}$

b Schrijf als macht van 10:

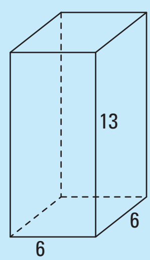
1 kg = … mg
1 mg = … g
1m^3 = … mm^3

9 Schrijf als de som van machten van 2 (bijvoorbeeld $266 = 2^8 + 2^3 + 2$) en vervolgens in de super-*2*- notatie ($2^{2^{(2+1)}} + 2^{2+1} + 2$); je stopt dus tot alle getallen kleiner of gelijk zijn aan 2!

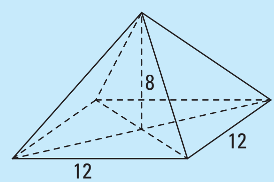
a 548
b 784
c 1 358
d 2 774
e 11 712

10[1] In de figuren 1.14a en b zijn schematisch twee gebouwen A en B voorgesteld. Gebouw A heeft de vorm van een balk van 6 bij 6 bij 13. De oppervlakte van dit gebouw, grond- en bovenvlak en de zijvlakken, is 384 en de inhoud is 468. Gebouw B heeft de vorm van een piramide met de top midden boven het grondvlak. De vorm van het grondvlak is een rechthoek van 12 bij 12. De hoogte van het gebouw is 8.

Figuur 1.14a **Gebouw A**



Figuur 1.14b **Gebouw B**



a Toon met een berekening aan dat gebouw B een even groot oppervlak heeft als gebouw A en dat de inhoud verschilt van die van A. De inhoud I van een piramide is $\frac{1}{3} \cdot G \cdot h$, waarbij G de oppervlakte is van het grondvlak en h de hoogte van de piramide.

De compactheid van een gebouw wordt uitgedrukt door de formule $C = \frac{I}{A}$, met I is de inhoud en A is de oppervlakte van het gebouw.

Bij gebouw A is die verhouding gelijk aan $C = \frac{I}{A} = \frac{468}{384} \approx 1{,}22$. Bij gebouw B is die verhouding kleiner.
Voor de compactheid van een gebouw vergelijkt men de oppervlakte, inclusief het grondvlak, van de buitenkant van het gebouw met de oppervlakte van een bol met dezelfde inhoud. In de bouw wordt de compactheid van een gebouw middels de volgende vier stappen berekend:
1 Bereken de oppervlakte en de inhoud van het gebouw.
2 Bereken de straal van de bol met dezelfde inhoud als die van het gebouw.
3 Bereken de oppervlakte van die bol.
4 Bereken de compactheid C als geldt $C = \frac{\textit{oppervlakte bol}}{\textit{oppervlakte gebouw}}$.

Een bol met straal r heeft een inhoud van $\frac{4}{3}\pi r^3$ en een oppervlakte van $4\pi r^2$.

1 Vrij bewerkte opgave eindexamen wiskunde B1-2 havo 2003-II

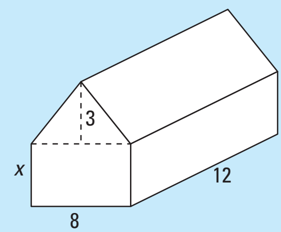
b Toon met een berekening middels de vier voorgaande stappen aan dat voor gebouw A geldt $C \approx 0{,}759$

De compactheid C kan ook direct uitgedrukt worden in de inhoud I en de oppervlakte A van het gebouw. Bij benadering geldt $C = \dfrac{4{,}84 \cdot I^{\frac{2}{3}}}{A}$.

c Toon met behulp van de laatste formule aan dat de compactheid van een kubus met ribbe r gelijk is aan 0,81 voor *elke* positieve waarde van r.

In figuur 1.15 is een huis getekend in de vorm van een recht prisma. Het huis is 8 meter breed en 12 meter lang. De hoogte van de zolderverdieping is 3 meter. De nok van het dak ligt midden boven de zoldervloer. De hoogte van de benedenverdieping laten we variëren en geven we daarom aan met x.

Figuur 1.15 **Huis in de vorm van een recht prisma**



d Toon aan dat de oppervlakte [m²] van dit huis gelijk is aan $240 + 40x$. Bereken tevens de inhoud van het huis uitgedrukt in x.

e Schat door de grafiek van $C = \dfrac{4{,}84 \cdot I^{\frac{2}{3}}}{A}$ te tekenen de maximale compactheid van het gebouw en de waarde van x waarvoor deze wordt bereikt. Geef de antwoorden in één cijfer nauwkeurig achter de komma.

11 Door de technische ontwikkelingen in de vorm van 'Atomic force' microscoop, deeltjesversneller en Hubble Space Telescoop is de mens erin geslaagd zijn zintuiglijke actieradius te vergroten. Veel terreinen die voorheen visueel ontoegankelijk waren zijn nu binnen ons bereik gekomen.

Met behulp van elektronenmicroscopen is het mogelijk materialen tot een vergroting van 300.000 te bekijken. Dergelijke grote getallen schrijven we in een andere vorm, de wetenschappelijke vorm. Zo schrijven we $300.000 = 3{,}0 \cdot 10^6$ of als $3{,}0 \cdot \text{E} + 6$. Foto's gemaakt met een elektronenmicroscoop leveren vaak prachtige plaatjes op. Er zijn dan ook fotografen die de microfotografie gebruiken als een vorm van kunstuiting. De zwart-wit beelden die met de elektronenmicroscoop worden verkregen worden met digitale beeldbewerking toegevoegd waardoor prachtige composities ontstaan.

Schrijf als macht van 10:
1 l = … ml
1 kWh = … J
1 micron = … m

5.440.000.000 bits = … bits
10 megabyte (bijna één minuut video) = … bits
5 gigabyte (7000 vakantiefoto's van goede kwaliteit) = … bits

Praktijksituatie

Machten van tien

In de meeste gevallen heeft een ingenieur en een natuurkundige behoefte aan aanduidingen en berekeningen die hem een indruk geven van de *orde van grootte* van een zekere grootheid. De precieze waarde is niet van belang daar waar het gaat om zeer grote en erg kleine waarden. Men maakt dan een grove berekening waarbij men machten van tien gebruikt en afrondingen van de getallen tot de eerste belangrijke cijfers.
Zo wordt de straal van een H-atoom gegeven door 0,00000000005 m. In de notatie van machten van tien wordt dit $5 \cdot 10^{-11}$.

Een ander voorbeeld is het getal van Avogadro, $N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}$, een enorm groot getal dus. Dit getal stemt overeen met de hoeveelheid moleculen van om het even welk gas bij een volume van 22,41 liter. Avogadro was een Italiaanse wetenschapper (1776–1856).

Amedeo Avogadro
1776–1856

Stel een ingenieur moet een pacemaker maken voor een vrouw van 20 jaar. Hij vraagt zich af hoeveel hartkloppingen zo'n pacemaker zou moeten kunnen maken, als de vrouw een gemiddelde leeftijd bereikt. Dan zou zijn berekening mogelijk volgens de volgende stappen verlopen.

- De gemiddelde leeftijd van een vrouw in Nederland is 75 jaar.
- Hij doet een aantal aannames. Veiligheidshalve zou de pacemaker het minstens 60 jaar uit moeten houden. Hij gaat ervan uit dat er elke seconde één hartslag is.
- Het aantal seconden per jaar bedraagt $365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 \approx 400 \cdot 20 \cdot 4000 \approx 32 \cdot 10^6 = 3{,}2 \cdot 10^7$ seconden. Na 60 jaar zijn dit $60 \cdot 3{,}2 \cdot 10^7$ hartslagen $\approx 18 \cdot 10^8 \approx 2 \cdot 10^9$ hartslagen. Veiligheidshalve vermenigvuldigt hij het resultaat met een factor 2 en komt zo tot een raming van $4 \cdot 10^9$ impulsen vóór de pacemaker het begeeft.

In het SI-systeem, Système International waarin basisgrootheden en grondeenheden zijn vastgelegd, zie tabel 1.3, worden decimale voorvoegsels gebruikt, waarvan de waarden uitgedrukt kunnen worden in machten van tien.

Tabel 1.3 **Basisgrootheden en grondeenheden**

naam	symbool	waarde	naam	symbool	waarde
yotta	Y	10^{24}	deci	D	10^{-1}
zetta	Z	10^{21}	centi	C	10^{-2}
exa	E	10^{18}	milli	m	10^{-3}
peta	P	10^{15}	micro	μ	10^{-6}
tera	T	10^{12}	nano	n	10^{-9}
giga	G	10^{9}	pico	p	10^{-12}
mega	M	10^{6}	femto	f	10^{-15}
kilo	k	10^{3}	atto	a	10^{-18}
hecto	h	10^{2}	zepto	z	10^{-21}
deca	da	10^{1}	yocto	y	10^{-24}

1.3.1 Rekenregels voor machten met een gehele exponent

Definities

1 Het n keer herhaald vermenigvuldigen van de factor a wordt verkort genoteerd als a^n, spreek uit 'a tot de macht n'. In formulevorm:

$$\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots\ldots \cdot a}_{n \text{ factoren } a} = a^n.$$

Grondtal/ exponent

2 In de notatie van de macht a^n heet a het grondtal en n de exponent.

Opmerking 1

n factoren a worden genoteerd als a^n en *n termen a* worden genoteerd als

$$n \cdot a = \underbrace{a + a + \ldots\ldots + a}_{n \text{ termen } a}$$

Opmerking 2

Je bent al heel vroeg op school machten tegengekomen. Denk maar eens de oppervlakte van een rechthoek. Deze wordt uitgedrukt in cm^2, dm^2, m^2 enzovoort. De inhoud van een kubus noteren we in cm^3, dm^3, m^3 enzovoort.

In deze leereenheid wordt onderscheid gemaakt tussen *positieve gehele, negatieve* en *gebroken* exponenten. De rekenregels die in deze paragraaf worden toegepast, hebben betrekking op positieve gehele exponenten.

UITLEG

Uit de volgende voorbeelden en opdrachten kunnen de rekenregels afgeleid worden over het rekenen met machten met gehele exponenten.

1 $$2^3 \cdot 2^5 = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2}_{3 \text{ factoren } 2} \cdot \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{5 \text{ factoren } 2} = \underbrace{2^8}_{8 \text{ factoren } 2}$$

2 $$p^m \cdot p^n = \underbrace{p \cdot p \cdot \ldots\ldots\ldots \cdot p}_{m \text{ factoren } p} \cdot \underbrace{p \cdot p \cdot \ldots\ldots\ldots \cdot p}_{n \text{ factoren } p} = \underbrace{p^{m+n}}_{(m+n) \text{ factoren } p}$$

3 $$(5^2)^3 = 5^2 \cdot 5^2 \cdot 5^2 = \underbrace{5^6}_{3 \text{ keer } 2 \text{ factoren } 5}$$

4 $$(3 \cdot 5)^7 = \underbrace{(3 \cdot 5) \cdot (3 \cdot 5) \cdot \ldots\ldots\ldots \cdot (3 \cdot 5)}_{7 \text{ factoren } (3 \cdot 5)}$$

$$= \underbrace{3 \cdot 3 \cdot \ldots\ldots\ldots \cdot 3}_{7 \text{ factoren } 3} \cdot \underbrace{5 \cdot 5 \cdot \ldots\ldots\ldots \cdot 5}_{7 \text{ factoren } 5} = 3^7 \cdot 5^7$$

5 $$\left(-\tfrac{2}{3}\right)^5 = -\tfrac{2}{3} \cdot -\tfrac{2}{3} \cdot -\tfrac{2}{3} \cdot -\tfrac{2}{3} \cdot -\tfrac{2}{3} = -\frac{2^5}{3^5} = -\tfrac{32}{243}$$

6 $\dfrac{2^{10}}{2^{6}} = \dfrac{\overbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \cdot 2}^{\text{10 factoren 2}}}{\underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots\ldots\ldots \cdot 2}_{\text{6 factoren 2}}} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = \underbrace{2^4}_{\text{(10 – 6) factoren 2}}$

7 $\dfrac{2^6}{2^{10}} = \dfrac{1}{2^4}$

8 $\dfrac{3^5}{3^5} = 3^0$ en $\dfrac{3^5}{3^5} = 1 \Rightarrow 3^0 = 1$

9 Zoals in de Praktijksituatie al is opgemerkt, worden zeer grote en erg kleine getallen als macht van tien geschreven. Deze korte notatie, de wetenschappelijke notatie genoemd, zorgt voor een grotere leesbaarheid van het getal en komt goed van pas bij een eerste, grove berekening van een probleem. Hier volgen enkele voorbeelden.

a $150\,000\,000 = 1{,}5 \cdot 10^8$

b $23\,500\,000\,000 = 2{,}35 \cdot 10^{10}$

c $0{,}006\,57 = 6{,}57 \cdot 10^{-3}$

d $0{,}348 = 3{,}48 \cdot 10^{-1}$

Opmerking
In plaats van bijvoorbeeld $1{,}5 \cdot 10^{11}$ schrijft men ook wel 1,5 E + 11 en $6{,}57 \cdot 10^{-3}$ als 6,57 E – 3

In de volgende voorbeelden en opdrachten komt bovenstaande theorie nog eens aan de orde maar met enige verdieping. Deze aanvulling staat in 'Samenvatting'.

10 $a^3 \cdot b^3 \cdot a^8 \cdot b^5 \cdot a^7 = a^{18}b^9$

11 $(-a^3)^5 = -a^{15}$

12 $(p^3q^5r^2)^4 = p^{12}q^{20}r^8$

13 $-\left(-\dfrac{p^2q^5}{r^3}\right)^4 = -\left(\dfrac{p^8q^{20}}{r^{12}}\right) = -\dfrac{p^8q^{20}}{r^{12}}$

14 $\dfrac{-x^3y^7z}{-x^6z^3} = \dfrac{y^7}{x^3z^2}$

Opdrachten

1 a $3^7 \cdot 3^4 =$

b $5^2 \cdot 7^3 \cdot 5^4 \cdot 5^3 \cdot 7^5 =$

c $(3^7)^4 =$

d $(a^m)^n =$

e $(7 \cdot 11)^8 =$

f $(a \cdot b)^n = (ab)^n =$

2 a $\left(\frac{5}{7}\right)^{11} =$

b $\left(\frac{a}{b}\right)^n =$

c $\frac{a^m}{a^n} = a^{\cdots}$, als $m > n$

d $\frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{\cdots\cdots}}$, als $n > m$

e $a^0 = \ldots$, met a in $\mathbb{R}$ en $a \neq 0$

3 Schrijf in de wetenschappelijke notatie:

a 543 000 000 =

b 186 =

c 243,01 =

d 0,000 0007 =

e 0,000 23 =

4 a $-a^3 \cdot b^5 \cdot a^2 \cdot -a^7 \cdot -b^6 =$

b $(-x^4y^2z^5)^7 =$

c $(-p^2q^5)^3 \cdot -(p^5q^3)^6 =$

d $-\left(-\frac{a^2b^5c^3}{d^4e^3}\right)^5 =$

e $\left(-\frac{p^3q^7r^2}{pr^5}\right)^2 \cdot \left(-\frac{p^2qr^4}{q^6r}\right)^3 =$

Uit voorgaande voorbeelden en opdrachten is de volgende theorie af te leiden.

SAMENVATTING

Rekenregels voor machten met positieve gehele exponent.

Rekenregels

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ — ***m* factoren *a* maal *n* factoren *a* is gelijk aan (*m* + *n*) factoren *a***
2. $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$ — ***n* factoren *a*^{m} is gelijk aan *n* · *m* factoren *a***
3. $(ab)^n = a^nb^n$ — ***n* factoren *ab* is gelijk aan *n* factoren *a* maal *n* factoren *b***
4. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ — ***n* factoren $\frac{a}{b}$ is gelijk aan *n* factoren *a* gedeeld door *n* factoren *b*; *b* ≠ 0**
5. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ — **als *m* > *n*, dan geldt *m* factoren *a* gedeeld door *n* factoren *a* is gelijk aan (*m* – *n*) factoren *a*; *a* ≠ 0**

   $\frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}}$ — **als *n* > *m*, dan geldt *m* factoren *a* gedeeld door *n* factoren *a* is gelijk aan 1 gedeeld door (*n* – *m*) factoren *a*; *a* ≠ 0**
6. $a^0 = 1$ — **'0 factoren *a*' is het resultaat verkregen uit een deling van gelijke aantallen factoren *a***
7. $(-a)^n = a^n$ — **als *n* is even**
8. $(-a)^n = -a^n$ — **als *n* is oneven**

Zeer grote en erg kleine getallen worden omwille van de leesbaarheid en van een eerste, grove berekening geschreven in machten van tien, de wetenschappelijke notatie $g = a \cdot 10^p$, met a een decimaal getal zodat $1 \leq a \leq 10$ en p is gelijk aan het aantal cijfers tussen de nieuwe positie van de decimale komma en de oorspronkelijke positie. $p > 0$ als de komma naar links is verschoven en $p < 0$ als de komma naar rechts is verschoven. In plaats van $g = a \cdot 10^q$ en $g = a \cdot 10^{-q}$ schrijft men ook wel a E + q respectievelijk a E – q.

VRAAGSTUKKEN

1.47 Schrijf zonder haakjes:

a $(\frac{1}{2})^6 \cdot (\frac{1}{2})^4 =$

b $\left(-\dfrac{a}{b}\right)^3 =$

c $((x + y)^2)^3 =$

d $\left(\dfrac{-2}{5}\right)^4 =$

e $\left(\dfrac{2}{-5}\right)^5 =$

1.48 Vereenvoudig, indien mogelijk:

a $(a - b)^0 =$

b $\dfrac{z^8}{z^3} \cdot \dfrac{z^4}{8} =$

c $\left(\dfrac{a}{b}\right)^0 =$

d $\dfrac{x^2y^3}{xy} =$

e $a - b^0 =$

f $\dfrac{a^4 + b^4}{a^3} =$

g $\dfrac{a^8}{a^4 + b^4} =$

h $\dfrac{(x^2y^3)^2}{(-x)^3} =$

i $\dfrac{a^8}{a^4b^3} =$

1.49 Vereenvoudig:

a $\left(\dfrac{a^pb^2}{c^5}\right)^m =$

b $\dfrac{a^{p+1}b^{q+1}}{a^{p-1}b^{q-1}} =$

c $\dfrac{a^{p+3}b^{p+4}}{a^3b^p} =$

d $\left(\dfrac{a^{2p+3}}{a^p}\right)^3 =$

e $\left(\dfrac{a^4b^{3p}}{a^4}\right)^2 =$

1.50 Schrijf in de wetenschappelijke notatie.

a De snelheid van licht bedraagt 300 000 000 m/sec

b De massa van een stofdeeltje is 0,000 000 000 753 kg

c $(5 \cdot 10^4) \cdot (6 \cdot 10^5) =$

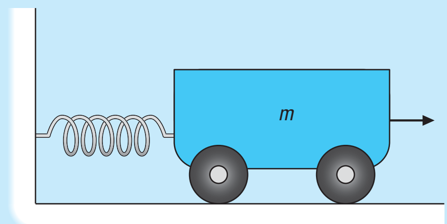
d $(7 \cdot 10^4) \cdot (5 \cdot 10^6) \cdot (3 \cdot 10^2) =$

e $(6{,}1 \cdot 10^{-2}) \cdot (3{,}42 \cdot 10^{-8}) \cdot (8{,}125 \cdot 10^{-1}) =$

1.3.2 Machten met een negatieve en gebroken exponent

In de praktijksituaties kunnen zich omstandigheden voordoen waarbij gerekend wordt met machten met een *negatieve exponent*, bijvoorbeeld een kracht $F = \ldots\ N = \ldots$ kg m/s$^2 = \ldots$ kg ms^{-2} of een versnelling $a =$ m/s$^2 = \ldots$ ms^{-2} Hieronder wordt een situatie besproken waarin een macht voorkomt met een *gebroken exponent*. Machten met een negatieve of gebroken exponent worden *oneigenlijke machten* genoemd.

Figuur 1.16 **Kar d.m.v. veer verbonden met wand**



Een voorbeeld van een gebroken exponent kan worden gedemonstreerd aan de hand van de trillingstijd, T, van een karretje aan een veer. Een karretje waarvan de massa gelijk is aan m, is door middel van een horizontale veer verbonden met een wand, zie figuur 1.16. Als aan het karretje wordt getrokken en het vervolgens wordt losgelaten, zal het karretje heen en weer bewegen met een trillingstijd T waarvoor geldt:

$T = 2\pi \cdot \left(\dfrac{m}{k}\right)^{\frac{1}{2}}$, waarbij k de veerconstante van de veer is. Zoiets heet: een oneigenlijke macht van $\left(\dfrac{m}{k}\right)$.

Wat negatieve en gebroken exponenten voorstellen en hoe ermee gerekend wordt, komt in deze paragraaf aan de orde.

UITLEG

De nu volgende voorbeelden en opdrachten gaan over het rekenen met machten met negatieve en positieve exponent en de rekenregels die daarvoor gelden.

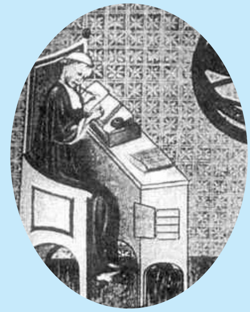
1 $\dfrac{a^5}{a^8} = \dfrac{1}{a^3}$; deze uitkomst kan herleid worden tot de oneigenlijke macht $a^{5-8} = a^{-3}$. Je zou kunnen zeggen dat de teller bij de deling van machten van a, drie factoren te kort komt!

2 $\dfrac{a^3b^4c^7}{a^4b^2c^9} = \dfrac{b^2}{ac^2} = a^{-1}b^2c^{-2}$

3 $(p^3q^{-4}r^2)(p^{-1}q^3r^{-5}) = \left(\dfrac{p^3r^2}{q^4}\right)\left(\dfrac{q^3}{pr^5}\right) = \dfrac{p^3q^3r^2}{pq^4r^5} = \dfrac{p^2}{qr^3}\ (= p^2q^{-1}r^{-3})$

Dus $(p^3q^{-4}r^2)(p^{-1}q^3r^{-5}) = p^2q^{-1}r^{-3}$. Dan mag rekenregel 1 ook toegepast worden bij vermenigvuldiging van machten met negatieve exponenten! Deze mogelijkheid geeft in bovenstaande situatie een sneller resultaat!
Deze eigenschap kan bewezen worden. Hier wordt echter volstaan met de opmerking dat de rekenregels 1 t/m 5 allemaal toegepast kunnen worden voor machten met negatieve exponenten.

Nicole d’Oresme



Nicole d’Oresme (1323–1382), raadsman van de Franse koning Charles V en uiteindelijk bisschop van Lisieux. Hij is echter vooral bekend als echte wetenschapper, één van de belangrijkste uit de Middeleeuwen. Hij wordt als de voorloper beschouwd van latere geleerden als Descartes, Copernicus en Galilei. Hij was de eerste die een grafische voorstelling gebruikte. Hij gebruikte de grafiek om bewegingen die hij bestudeerde weer te geven. Hij was ook de eerste die gebruik maakte van gebroken exponenten.
Ook op economisch gebied stond deze Franse geleerde zijn mannetje. Hij werd met zijn werk De Moneta (over het muntstelsel) de grootste Middeleeuwse econoom genoemd.

In de volgende voorbeelden wordt gebruikgemaakt van het feit dat een andere schrijfwijze voor $\sqrt{a}$ gelijk is aan $a^{\frac{1}{2}}$ (met a $\geqq 0$).

Er geldt:

1 $\sqrt{4} = (2^2)^{\frac{1}{2}} = 2^1 = 2$

2 $\sqrt{81} = (3^4)^{\frac{1}{2}} = 3^2 = 9$

3 $\sqrt[5]{32} = (2^5)^{\frac{1}{5}} = 2$

Tweedemachtswortels zijn dus als gebroken machten te schrijven. Algemeen geldt zelfs:
$\sqrt[p]{a} = a^{\frac{1}{p}}$, p in $\mathbb{N}$, en $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$
De rekenregels zijn er ook op van toepassing:

1 $3^{\frac{4}{2}} =$ {eerst machtsverheffen dan worteltrekken!} $(3^4)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{81} = 9$; of omdat het grondtal positief is, kunnen we in dit geval sneller tot een resultaat komen: $3^{\frac{4}{2}} = 3^2 = 9$

2 $\sqrt[5]{1\,024 \cdot 243} = \sqrt[5]{2^{10} \cdot 3^5} = (2^{10} \cdot 3^5)^{\frac{1}{5}} = 2^2 \cdot 3^1 = 4 \cdot 3 = 12$

3 $\left(\dfrac{a^2}{b}\right)^{\frac{1}{2}} = \dfrac{a^{2 \cdot \frac{1}{2}}}{b^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{a}{\sqrt{b}}$, als a positief is (en b ook)!

In de volgende voorbeelden komt de theorie nog eens aan bod en wordt verder aangevuld.

1 $2^{\frac{6}{2}} = (2^6)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{64} = 8 = 2^3$ {2^6 is positief, dus $(2^6)^{\frac{1}{2}}$ bestaat}
terwijl $-2^{\frac{6}{2}} = (-2^6)^{\frac{1}{2}} = (-64)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-64}$; dus $-2^{\frac{6}{2}}$ bestaat niet! Een gevolg is, dat $-2^{\frac{6}{2}} \neq -2^3$!!!

2 $5^{\frac{9}{3}} = (5^9)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{1\,953\,125} = 125 = 5^3$ {omdat het hier om een oneven machtswortel gaat, is het niet van belang of 5^9 positief of negatief is; dus $(5^9)^{\frac{1}{3}}$ bestaat} terwijl
$(-5)^{\frac{9}{3}} = (-5^9)^{\frac{1}{3}} = (-1\,953\,125)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-1\,953\,125} = -125$ dus $-5^{\frac{9}{3}}$ bestaat. Omdat het rekenen met oneigenlijke machten met negatief grondtal tot een

tegenspraak kan leiden, spreken we af dat we het grondtal bij oneigenlijke machten altijd positief nemen.

Opdrachten

5 Herleid en schrijf de uitkomst als een macht met positieve exponent:
$(p^{-2}q^5r^{-1})^{-3} =$

6 Herleid en schrijf de uitkomst met positieve exponenten:

$\left(\dfrac{a^2}{b^3c^5}\right)^{-2} =$

7 Vereenvoudig door gebruik te maken van oneigenlijke machten. De letters stellen positieve getallen voor.

a $\left(\dfrac{p^3q^4}{r^7}\right)^{\frac{1}{2}} =$

b $(x^2yz^4)^{-\frac{1}{2}} =$

c $\sqrt[3]{x^4y^2z^7} =$

d $\dfrac{10}{\sqrt{10}} =$

e $\dfrac{\left(a^{\frac{1}{3}}\right)^2 \cdot \left(b^{\frac{2}{3}}\right)^4}{a^{-\frac{1}{3}} \cdot b^{\frac{3}{2}}} =$

f $\dfrac{\sqrt{p} \cdot \sqrt[3]{pq}}{q^2} =$

8 Schrijf indien nodig als oneigenlijke macht en bereken:

a $2^{\frac{6}{2}} =$

b $\sqrt[3]{5^9} =$

c $(-5)^{\frac{9}{3}} =$

d $\sqrt[5]{(-3)^{10}} =$

Uit voorgaande voorbeelden en opdrachten is de volgende theorie af te leiden met betrekking tot machten met negatieve of gebroken exponent:

SAMENVATTING

De rekenregels 1 t/m 5 zijn ook van toepassing op machten met negatieve of gebroken exponenten.

Rekenregels

9 $a^{-m} = \dfrac{1}{a^m}$, **het resultaat van een deling van machten van *a* waarbij de teller *m* factoren te kort komt, is weer een macht van *a* met als exponent *–m*, een *negatieve exponent.***

10 $\sqrt[q]{a^p} = a^{\frac{p}{q}}$, **de q^e-machtswortel van a^p is weer een macht van *a* met als exponent het q^e deel van de oorspronkelijke exponent *p*; het resultaat is een *gebroken exponent.***

11 $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$, ***p* is geheel en *q* is positief en geheel, *a* is positief**

12 $a^{\frac{p}{q}} = (a^p)^{\frac{1}{q}}$, **zelfde voorwaarden**

Opmerking
a^{-m} en $a^{\frac{p}{q}}$ heten dus *oneigenlijke* machten van *a*.

VRAAGSTUKKEN

1.51 Herleid en schrijf de uitkomst zonder oneigenlijke macht; de letters stellen positieve getallen voor.

a $(a^{p-3})^5 \div \sqrt{a^{6p-4}} =$

b $\dfrac{(a^{3n})^2}{(a^2)^{n-1}} \div \sqrt[3]{a^{6n-3}} =$

c $\sqrt{a^2 \cdot b^2} =$

d $\sqrt{a^4 + b^4} =$

e $\sqrt[9]{a^{\frac{3}{2}}} =$

f $\sqrt{pq} \cdot \sqrt{pq^3} =$

g $\sqrt{a^2 + 2ab + b^2} =$

h $\sqrt[3]{\dfrac{8a^9b}{27(a^{-3}b^2)^{-4}}} =$

1.52 Schrijf zo eenvoudig mogelijk: $\sqrt{\dfrac{0{,}16 \cdot a^7b^4}{(a^{-1}c^2)^3}} =$

1.53 Voor de remweg S_r van een auto geldt bij een nat wegdek bij benadering $S_r = \frac{3}{4}\left(\dfrac{v}{10}\right)^{2{,}1}$ m. Hierin is v de snelheid van de auto op het moment dat er geremd wordt, uitgedrukt in km/uur.

a Hoe hard reed de auto als het remspoor 120 m bedraagt?
b Druk v uit in S_r.

1.54 Herleid en schrijf de uitkomst zonder oneigenlijke macht; alle letters stellen positieve getallen voor.

a $\dfrac{\sqrt{c} \div \sqrt[5]{c^2}}{c^{-2}} =$

b $\dfrac{3^{\frac{5}{3}}}{(3^6)^{\frac{1}{9}}} =$

c $\sqrt[5]{a^3b^2} \div \sqrt[3]{ab^2} =$

d $\sqrt[3]{\dfrac{81p^{-7}}{64(p^5q^2)^4}} =$

e $5^{\frac{3}{4}} \cdot (25^2)^{\frac{1}{3}} =$

f $\dfrac{\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt{a^3b^2}}{\sqrt[5]{a}} =$

g $\dfrac{(-5^6)^{\frac{3}{4}}}{(-5^3)^{\frac{2}{9}}} =$

1.55 Het warmteverlies van een dier hangt af van zijn huidoppervlakte: via een grotere huid gaat meer warmte verloren dan via een kleinere huid.
De warmteproductie hangt af van het volume: een groot dier produceert meer warmte dan een klein dier.
Biologen vergelijken daarom de huidoppervlakte H (in m^2) met het lichaamsgewicht G (in kg).
Het verband tussen H en G wordt gegeven door de formule $H = c \cdot \sqrt[3]{G^2} = c \cdot G^{\frac{2}{3}}$.
De constante c hangt af van de vorm van het dier en is dan ook per diersoort verschillend.
Een paar voorbeelden: $c_{koe} = 0{,}09$, $c_{aap} = 0{,}12$, $c_{egel} = 0{,}075$ en $c_{muis} = 0{,}09$.

Voor een koe en een muis geldt dus: $H = 0{,}09\ G^{\frac{2}{3}}$. Een koe weegt gemiddeld 500 kg, een muis 0,05 kg.

a Bereken de huidoppervlakte van een koe en van een muis.
b Hoe verhouden zich de lichaamsgewichten van een koe en een muis? En hoe de huidoppervlakten?
c Stel dat van een diersoort twee formaten voorkomen. De formaten hebben dezelfde vorm, dus ook dezelfde constante c. Het grote formaat is 8 keer zo zwaar als het kleine formaat.
Hoe verhouden zich dan de huidoppervlakten van de twee formaten?
d Dezelfde vraag als in opgave c, maar nu is het grote formaat 7 keer zo zwaar als het kleine.

e Grotere dieren kunnen gemakkelijker extreme koude verdragen dan kleine dieren. Kun je dat met de formule verklaren? (hoe groter het gewicht, hoe kleiner (verhoudingsgewijs) de huidoppervlakte).

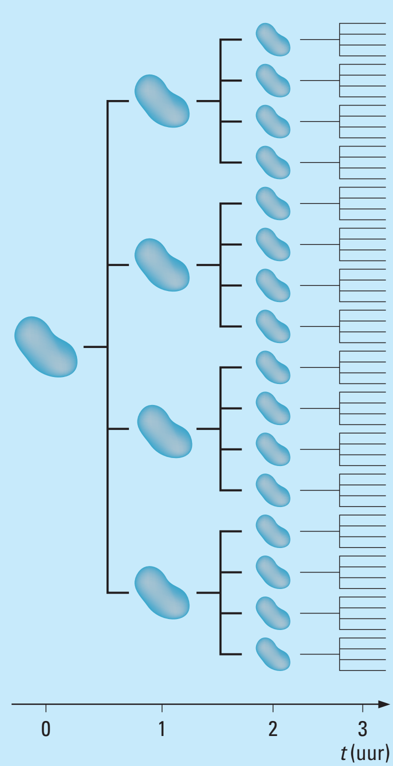
1.56 Een bacterie verviervoudigt zich per uur.
In figuur 1.17 is deze ontwikkeling schematisch weergegeven.

a Bereken hoeveel bacteriën er na 4 uur zijn.

b Bereken hoeveel bacteriën er na 10 uur zijn.

c Schrijf de uitkomst van opgave **b** in de wetenschappelijke vorm. Het decimale getal afronden op 2 cijfers achter de komma.

Figuur 1.17 **Verviervoudiging van een bacterie**



1.57 Een kapitaal van €1000 staat uit tegen een jaarlijkse rente van 4%. De rente wordt steeds over het kapitaal en de rente berekend.

a Schrijf het eindkapitaal na één jaar op in de vorm van een macht waarin de 4% verwerkt is.

b Schrijf het eindkapitaal na twee jaar in de vorm van een macht zoals in opgave **a**.

c Schrijf het eindkapitaal na tien jaar op in de vorm van een macht.

d Schat met behulp van je rekenapparaat of met behulp van Excel hoe lang het kapitaal uit moet staan om een eindwaarde te bereiken van €1872.
Aanwijzing voor Excel: omdat het eindkapitaal geschreven wordt in de vorm $K \cdot g^t$, maak je twee kolommen één met de verschillende waarden van t, het aantal jaren 0, 1, …, 8, 9, enzovoort en een kolom met de eindwaarden. In die tweede kolom ga je net zo lang door tot je de waarde 1872 hebt bereikt of net daarboven zit.

1.3.3 De wortel uit een getal

In de vorige paragrafen en bij het oplossen van vierkantsvergelijkingen in leereenheid 1.1 is al gebleken dat het rekenen met wortels onvermijdelijk is: de kwadratische vorm is niet mooi te ontbinden, de trillingstijd T bij het karretje en de veer is een wortelfunctie. De praktijk beperkt zich niet alleen tot situaties met de tweedemachtswortel. Zo is de straal r van een bol uit te drukken in het volume V van die bol met de functie $r = \sqrt[3]{\dfrac{3V}{4\pi}}$.
In deze paragraaf komen een aantal eigenschappen van wortels aan bod, waarbij het rekenen met oneigenlijke machten goed van pas komt. Ook komt worteltrekken vaak voor in vergelijkingen van het type $x^2 = 9$. De oplossing is dan $x_1 = \sqrt{9}$ en $x_2 = -\sqrt{9}$. Hierbij is $\sqrt{9}$ gelijk 3, omdat we afgesproken hebben dat vierkantswortels altijd positief zijn.

Francois Viète (1540–1603)

Het lijkt zo vanzelfsprekend dat we praten en schrijven over $x^3 + 5x - 1 = 0$ of $\sqrt{x^2 - 1}$.

Toch doen we dit pas circa 400 jaar. Vóór die tijd werd een vergelijking als $x^3 + 5x - 1 = 0$ in woorden omschreven (in het Latijn!) als ‘de derde macht van een grootheid, toegevoegd aan vijf keer die grootheid, te verminderen met …’ enzovoort. François Viète bracht hierin verandering. Deze Viète was, zoals vele grote wiskundigen uit die tijd, geen beroepswiskundige; hij was jurist en adviseur van het Franse koningshuis.
Viète dankt zijn bekendheid voornamelijk aan de invoering van de letteralgebra (in 1651 in zijn boek ‘In artem analyticam isagoge’, Inleiding tot de analytische kunst).
In de 16de eeuw was de algebra de kunst van het oplossen van vergelijkingen. Kort voor Viète had de algebra een groot succes behaald. Italiaanse rekenmeesters en geleerden hadden in de eerste helft van de 16de eeuw een methode gevonden om kubische vergelijkingen (zoals, in moderne notatie, $x^3 + 5x^2 + x - 2 = 0$) op te lossen, en daarmee hadden zij een nieuw stuk wiskunde uitgevonden. Maar sindsdien was er niet veel nieuws meer gebeurd. Er ontbrak een eenvoudig, uniform systeem voor het opschrijven van uitdrukkingen als $x^3 + 5x^2 + x - 2$; voor het opschrijven van algemene uitdrukkingen, zoals $ab^2 + bc + c$, of formules, zoals $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ was er in het geheel geen notatiesysteem. Hiervoor ontwikkelde Viète nu een letterschrijfwijze, waarbij hij het simpele maar belangrijke onderscheid maakte tussen onbekende en gegeven grootheden (onbekende gaf hij aan met een klinker, bekende met een medeklinker). Op andere punten is Viète nog klassiek: in plaats van onze schrijfwijze A^3 en A^2 schrijft hij nog Acub en Aquad. Vergelijkingen met twee onbekenden (zoals $5x + 2y = 3$) waren voor Viète oninteressant, omdat zij niet tot één oplossing leiden. Pas door het werk van de Franse filosoof René Descartes (1596-1650) en zijn tijdgenoot de jurist Pierre de Fermat kregen ook zulke onbepaalde vergelijkingen betekenis.

UITLEG

Uit de volgende voorbeelden kunnen we rekenregels afleiden die worden toegepast bij het rekenen met wortels. De rekenregels staan in de theorie samengevat.

1 $\sqrt{1\,620} = \sqrt{2^2 \cdot 5 \cdot 3^4} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{3^4} \cdot 18\sqrt{5}$

De ontbinding van het getal 1 620 in de factoren $2^2 \cdot 5 \cdot 3^4$ is eenvoudig te vinden door een deling als volgt uit voeren.

$$
\begin{array}{r|r}
 & 1620 \\
2 & 810 \\
2 & 405 \\
5 & 81 \\
3 & 27 \\
3 & 9 \\
3 & 3 \\
3 & 1
\end{array}
$$

De delers staan hierbij steeds voor de deelstreep, het deeltal erboven en de uitkomst na deling eronder. Zo is het getal 1 620 deelbaar door 2. Het getal 1 620 heet dan deeltal en het getal 2 is de deler. De uitkomst van de deling is 810. Deze uitkomst 810 is weer deelbaar door 2 met als uitkomst van de deling 405. Dit getal is deelbaar door 5 (of door 3) enz. Ga net zo lang door tot de einduitkomst 1 is bereikt. De ontbinding laat zich nu makkelijk aflezen door de delers met elkaar te vermenigvuldigen: $2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 2^2 \cdot 5 \cdot 3^4$.

2 $\sqrt{(-2)^6} \neq (-2)^3$; {de vierkantswortel uit een getal is positief!}

$\sqrt{(-2)^6} = \sqrt{2^6} = 2^3 = 8$

3 $\sqrt{a^2} = a$, als $a \geqq 0$; $\sqrt{a^2} = -a$, als $a < 0$

4 $\sqrt{3} \cdot \sqrt{5} = 3^{\frac{1}{2}} \cdot 5^{\frac{1}{2}} = (3 \cdot 5)^{\frac{1}{2}} = 15^{\frac{1}{2}} = \sqrt{15}$;

5 $\sqrt[5]{7} \cdot \sqrt[5]{13} = 7^{\frac{1}{5}} \cdot 13^{\frac{1}{5}} = (7 \cdot 13)^{\frac{1}{5}} = 91^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{91}$

6 $\dfrac{2}{\sqrt{2}} = \dfrac{2}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$ of $\dfrac{2}{\sqrt{2}} = \dfrac{2}{2^{\frac{1}{2}}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$.

Deze laatste manier met oneigenlijke machten gaat veel sneller.

Opdrachten

9 Herleid door gebruik te maken van oneigenlijke machten. Schrijf de uitkomst in een vorm zonder oneigenlijke macht.

a $\sqrt{1\,080} =$

b $(\sqrt{5})^3 =$

c $(\sqrt[4]{11})^7 =$

d $\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}} =$

e $\dfrac{\sqrt[3]{108}}{\sqrt[3]{4}} =$

f $\dfrac{3}{\sqrt{3}} =$

10 Stel dat $\sqrt{-2}$ bestaat en gelijk is aan x. Hoe groot zou x^2 dan zijn? Welke conclusie trek je?

Uit bovenstaande voorbeelden en opdrachten is de volgende samenvatting af te leiden met betrekking tot eigenschappen van wortels.

SAMENVATTING

Eigenschappen van wortels:

Eigenschappen

1 **$\sqrt{a}$ bestaat alleen als $a \geqq 0$**

2 **$\sqrt{a}$ is altijd positief**

3 **$\sqrt{a^2} = a$ als $a \geqq 0$; $\sqrt{a^2} = -a$ als $a < 0$**

4 **$\sqrt[p]{a} \cdot \sqrt[p]{b} = \sqrt[p]{ab}$; let op: $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ als $a \geqq 0$, $b \geqq 0$**

5 **$(\sqrt[p]{a})^n = \sqrt[p]{a^n}$**

6 $\dfrac{\sqrt[p]{a}}{\sqrt[p]{b}} = \sqrt[p]{\dfrac{a}{b}}$

7 $\dfrac{a}{\sqrt{a}} = \sqrt{a}$

8 $\sqrt[p]{a^q} = a^s\sqrt[p]{a^r}$ **met** $q : p = s$ **+ rest** r

Let op: $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, als $a \geqq 0$ en $b > 0$

VRAAGSTUKKEN

1.58 Herleid en schrijf de uitkomst in een vorm zonder oneigenlijke macht:

a $\sqrt{72} =$

b $\sqrt{216} =$

c $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{16} =$

d $(\sqrt[3]{a})^6 =$

e $(\sqrt[5]{a^2b^4}) \cdot (\sqrt[5]{a^4b^3}) \cdot (\sqrt[5]{a^3b^3}) =$

1.59 Vereenvoudig.

a $\sqrt{\dfrac{12\,250}{21\,500}}$

b $\sqrt{\dfrac{39\,366}{6\,561}} =$

c $\sqrt{\dfrac{10\,125}{19\,208}} =$

d $\sqrt{\dfrac{10\,368}{5\,292}} =$

1.60 a $\dfrac{\sqrt[4]{x^3y^2z}}{\sqrt[4]{x^7yz^5}} =$

b $\dfrac{\sqrt{a^5b^3}}{\sqrt{a^3b}} =$

c $\dfrac{\sqrt[7]{p^9q^5}}{\sqrt[7]{p^2q^{-9}}} =$

d $\dfrac{5}{2\sqrt{5}} =$

e $\dfrac{7}{3\sqrt{7}} =$

f $\dfrac{6}{4\sqrt{6}} \cdot \dfrac{3}{5\sqrt{3}} =$

UITLEG

In de volgende voorbeelden en opdrachten wordt gebruikgemaakt van voorgaande theorie, terwijl deze tevens wordt aangevuld met een aantal rekenregels. De afgeleide theorie is in de hiernavolgende samenvatting opgenomen.

1 $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt{5} = 4^{\frac{1}{3}} \cdot 5^{\frac{1}{2}} = 4^{\frac{2}{6}} \cdot 5^{\frac{3}{6}} = (4^2 \cdot 5^3)^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{2\,000}$

2 $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \dfrac{2^{\frac{1}{2}}}{3^{\frac{1}{2}}} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$

3 $\dfrac{5}{\sqrt{7}} = \dfrac{5}{\sqrt{7}} \cdot \dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = \frac{5}{7}\sqrt{7}$

4 $\sqrt[3]{7} \cdot \sqrt[8]{7} = 7^{\frac{1}{3}} \cdot 7^{\frac{1}{8}} = 7^{\frac{11}{24}} = \sqrt[24]{7^{11}}$

5 $\sqrt[3]{7^2} \cdot \sqrt[8]{7^5} = 7^{\frac{2}{3}} \cdot 7^{\frac{5}{8}} = 7^{\frac{31}{24}} = 7 \cdot \sqrt[24]{7^7}$

6 $\sqrt{(a-b)^2} = a - b$, als $a \geqq b$; $\sqrt{(a-b)^2} = b - a$, als $b \geqq a$

7 $\sqrt{p^2 - 4p + 4} = \sqrt{(p-2)^2} = (p - 2)$, als $p \geqq 2$

8 $\sqrt{s^2 + 8s + 16} = \sqrt{(s+4)^2} = (s + 4)$, als $s \geqq -4$

Opdrachten

11 Herleid door gebruik te maken van oneigenlijke machten. Schrijf de uitkomst in een vorm zonder oneigenlijke macht.

a $\sqrt[3]{p} \cdot \sqrt[5]{7} =$

b $\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt[3]{36}} =$

c $\dfrac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[5]{9}} =$

d $\dfrac{5}{\sqrt{3}} =$

e $\sqrt{a^2 - 6a + 9} =$

12 a Als $\left(\dfrac{a^2}{b}\right)^{\frac{1}{2}}$ bestaat, waarom is dan $b > 0$?

b Als $\left(\dfrac{a^2}{b}\right)^{\frac{1}{2}} = \dfrac{a}{\sqrt{b}}$, wat weet je dan van a?

13 Laat zien dat:

a $\sqrt[3]{7} \cdot \sqrt[8]{7} = \sqrt[24]{7^{11}}$

b $\sqrt[3]{5^2} \cdot \sqrt[8]{5^5} = 5 \cdot \sqrt[24]{5^7}$

SAMENVATTING

Uit de controlevoorbeelden en opdrachten blijkt, dat we de theorie als volgt kunnen aanvullen.

Eigenschappen

9 $\sqrt[p]{a} \cdot \sqrt[q]{a} = \sqrt[pq]{a^{p+q}}$

10 $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$

11 $\dfrac{a}{\sqrt{b}} = \dfrac{a\sqrt{b}}{b}$

12 **Als $x^2 + px + q$ ontbonden kan worden in $(x + a)^2$ dan is**

$\sqrt{x^2 + px + q} = \sqrt{(x+a)^2} = -(x + a)$, **als** $x < -a$ **of** $(x + a)$, **als** $x \geqq -a$

VRAAGSTUKKEN

1.61 Herleid en schrijf de uitkomst in een vorm zonder oneigenlijke macht:

a $\dfrac{2}{\sqrt{6}} =$

b $\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt[4]{7^2}} =$

c $\dfrac{\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[6]{5}} =$

1.62 Vereenvoudig

a $\sqrt{x^2 - 10x + 25.}$

b $\sqrt{y^2 + 8y + 16} =$

c $\sqrt{\dfrac{a^2}{b^4}} =$

d $\sqrt[4]{\dfrac{x^4 y^8}{z^{12}}} =$

1.63 a $\dfrac{\sqrt[3]{a^7}}{\sqrt[5]{a^4}} =$

b $\sqrt[3]{a^{11} b^{13} c} \cdot \sqrt[7]{a^5 b^6 c^4} =$

1.64 a $\sqrt[3]{x^2 y} \cdot \sqrt[4]{x^2 y^4} =$

b $\sqrt{ab^5 c} \cdot \sqrt{a^2 b^{1,5} c^{2,5}} =$

c $\sqrt[5]{pq^2} \cdot \sqrt[3]{p^3 q^2} =$

d $\dfrac{3 \cdot 5}{\sqrt{5}} =$

e $\dfrac{5 \cdot 15}{\sqrt{15}} \cdot \dfrac{4 \cdot 7}{\sqrt{7}} =$

f $\dfrac{4 \cdot 2}{\sqrt[3]{2}} \cdot \dfrac{6 \cdot 5}{\sqrt[4]{5}} =$

Eindtoets

1 Herleid en schrijf zonder oneigenlijke macht:

a $(a^3b^{-1}c^2)^{-1} \cdot (a^{-2}b^2c)^3 =$

b $\dfrac{3 \cdot 10^{-8} \cdot 4 \cdot (10^{-2})^{\frac{1}{2}}}{6 \cdot (10^{-4} \cdot 10^2)^{-3}} =$

c $\dfrac{(2a^{-3}b^{-2} \cdot (a^{-2}b^0)^{-1}}{(a^{-1}bc^0)^{-2}} =$

2 Herleid tot een oneigenlijke macht:

a $\sqrt[4]{a^3} =$

b $a \cdot \sqrt[5]{a} =$

c $a^2 \cdot \sqrt[5]{a^3} =$

d $\dfrac{1}{a^2\sqrt{a}} =$

e $\dfrac{1}{a \cdot \sqrt[4]{a}} \cdot \dfrac{1}{a^5 \cdot \sqrt[4]{a^3}} =$

f $\dfrac{\sqrt[12]{b}}{\sqrt[4]{b} \cdot \sqrt[3]{b^2}} =$

3 Bereken $y = 3^x - 3^{x-1} - 2 \cdot 3^{x-2}$ als:

a $x = 0$

b $x = 1$

c $x = 2$

4 Schrijf zo eenvoudig mogelijk: $\sqrt[3]{\dfrac{64a^{-18}b^2}{27(a^{-3}b^2c^0)^{-8}}}$.

5 Hoeveel is 20% van 5^{-40}?

6 Herleid en schrijf zonder oneigenlijke macht indien van toepassing:

a $\sqrt[5]{25} \cdot \sqrt[5]{625} =$

b $p^2 \cdot \sqrt{p} \cdot p^3 \cdot \sqrt{p} =$

c $q^3 \cdot \sqrt[7]{q^2} \cdot q^2 \cdot \sqrt[7]{q^6} =$

d $\dfrac{b^2 \cdot \sqrt[5]{b^4}}{b^3 \cdot \sqrt[5]{b^3}} =$

e $\dfrac{t^2 \cdot \sqrt[4]{t}}{t\sqrt{t}} \cdot \dfrac{t \cdot \sqrt[3]{t^2}}{t^5 \cdot \sqrt[12]{t^7}} =$

7 Hieronder staan een aantal beweringen. Welke beweringen zijn niet waar?

a $\dfrac{3}{\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

b $\sqrt[4]{5} \cdot \sqrt[4]{7} = \sqrt[8]{35}$

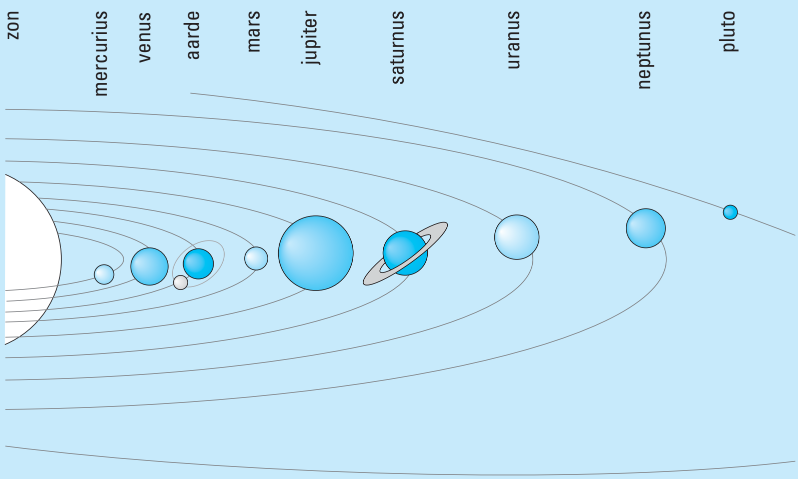
c $\sqrt[3]{162} = 3 \cdot \sqrt[3]{6}$

d $\dfrac{\sqrt[5]{3^4}}{\sqrt[10]{3^3}} = \sqrt{3}$

8 Een *Astronomische Eenheid* is de gemiddelde afstand tussen de aarde en de zon, 149.597.870,66 km. Omdat een planeet niet een cirkelvormige baan om de zon beschrijft, maar een ellipsvormige baan wordt de gemiddelde afstand gebruikt.

De term *Astronomische Eenheid* wordt afgekort als AE (Engels: AU, *Astronomical Unit*) en wordt in de astronomie gebruikt om grote afstanden in de ruimte aan te duiden.

Ons zonnestelsel



Het planetenstelsel van de zon noemt men *zonnestelsel* en bestaat uit negen planeten. Ze staan in tabel 1.4 vermeld. Sommige daarvan hebben nog enkele manen rond zich (manen of satellieten).
Vul tabel 1.4 aan met een kolom met de gemiddelde afstand in km en een kolom met km-afstanden uitgedrukt in de wetenschappelijke notatie.

Tabel 1.4 **Ons zonnestelsel**

Planeet	**Gemiddelde afstand tot de zon in AE**	**Gemiddelde afstand tot de zon in km**	**Gemiddelde km-afstand uitgedrukt in de wetenschappelijke notatie**
Mercurius	0,39		
Venus	0,72		
Aarde	1,00		
Mars	1,52		
Jupiter	5,20		
Saturnus	9,54		
Uranus	19,18		
Neptunus	30,06		
Pluto	29,44		

9 Schrijf als de som van machten van 2 (bijvoorbeeld $266 = 2^8 + 2^3 + 2$) en vervolgens in de super-*2*-notatie ($2^{2^{(2+1)}} + 2^{2+1} + 2$); je stopt dus tot alle getallen kleiner of gelijk zijn aan 2.

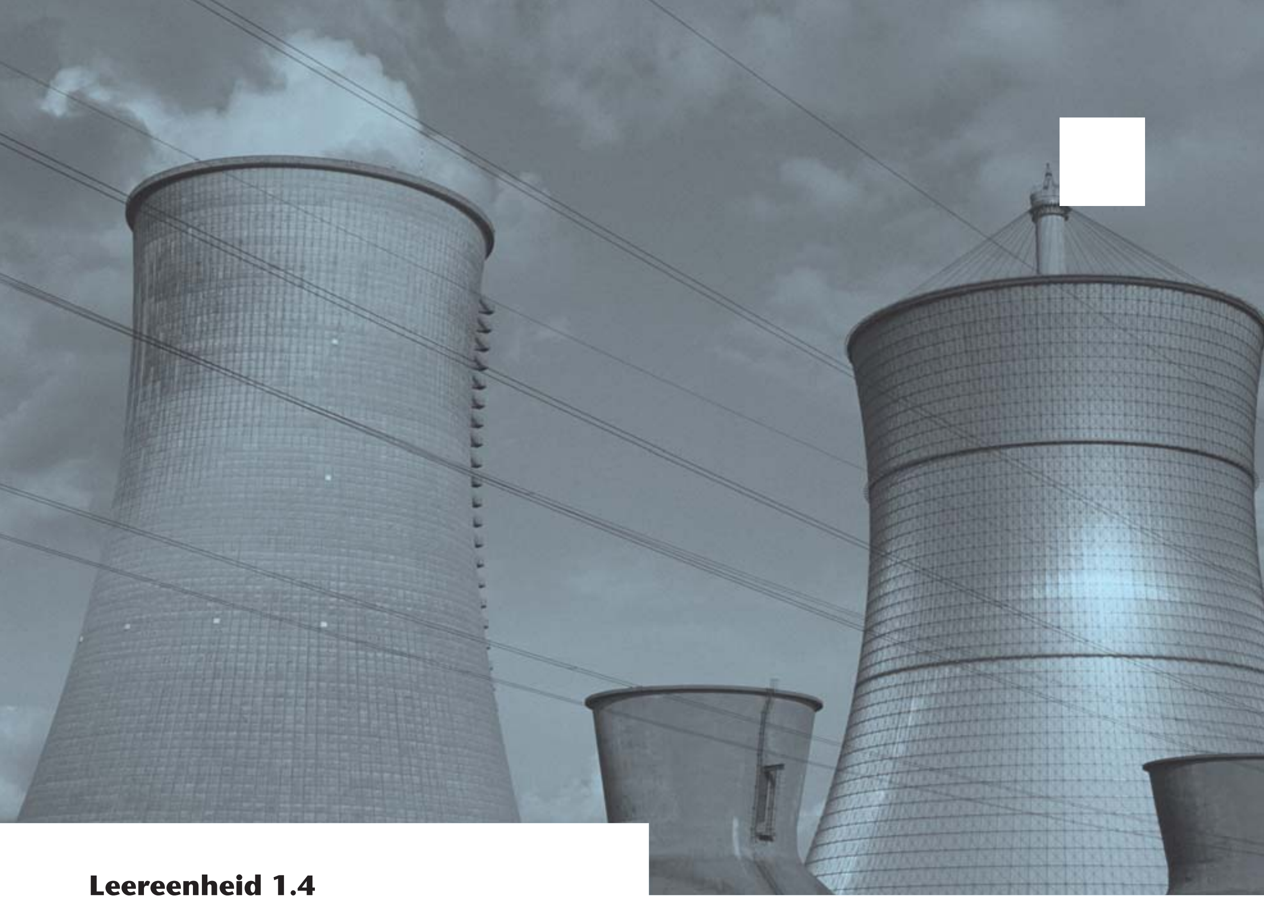
a 672
b 488
c 1 274
d 2 189
e 10 086

10 De grootte van de huidoppervlakte van een bepaald dier is belangrijk voor het warmteverlies. Dieren met een relatief groot huidoppervlak hebben meer energie nodig om in een koudere omgeving hun lichaam op temperatuur te houden.
De bioloog Meeh gebruikt voor het verband tussen lichaamsgewicht G (in kg) en de huidoppervlakte H (in dm^2) van dieren van een bepaalde soort een formule van de vorm: $H = c \cdot G^{\frac{2}{3}}$

De constante c heet de Meeh-coëfficiënt. Die Meeh-coëfficiënt verschilt per diersoort. Het is aardig om te weten hoe Meeh aan de waarde 11,2 kwam bij mensen. Hij verrichtte daartoe huidoppervlaktemetingen bij 16 mensen door de huid stukje bij stukje te bedekken met millimeterpapier (wat een engelengeduld!). Zo vond hij voor de mens als evenredigheidsconstante 11,2.

De formule voor de huidoppervlakte kan worden verklaard door naar wiskundige lichamen te kijken. We beginnen met een eenvoudig lichaam zoals de kubus. Neem aan dat de kubus is gemaakt van eikenhout. De soortelijke massa ρ van vurenhout is 0,3 kg/dm^3. Laat zien, dat voor het gewicht geldt: $G = 0{,}3 \cdot r^3$, als r de lengte van de ribbe is.

a De oppervlakte van de kubus is H. Bereken de Meeh-cëfficiënt van deze eikenhouten kubus.
b Bereken ook de Meeh-coëfficiënt van een ijzeren kubus($\rho = 7{,}9$).
c Doe hetzelfde voor een eikenhouten bol (oppervlakte bol is 4π r^2 en inhoud is $\frac{4}{3}\pi r^3$).
d Welk lichaam heeft een kleinere Meeh-coëfficiënt: een lange dunne eikenhouten cilinder of een korte dikke?
e Bij welke lichaamsvorm (kubus, bol of cilinder; lang, dik) verwacht je de kleinste Meeh-coëfficiënt als het materiaal hetzelfde blijft?



Leereenheid 1.4

Werken met logaritmen

Deze leereenheid zal ongeveer 10 SBU's in beslag nemen.

In deze leereenheid ga je de kennis van het begrip logaritme en de eigenschappen van de logaritmen opfrissen, om zodoende de vaardigheid in het rekenen met logaritmen te verbeteren. In bijna alle toepassingen waarin oneigenlijke machten voorkomen, duikt ook het begrip logaritme op. Vaak wordt de logaritme gebruikt om oneigenlijke machten weg te werken en om vergelijkingen op te lossen.

Diagnostische toets

Gebruik bij deze toets geen rekenmachine!

1 Bereken:

a ${}^{16}\log 2$

b ${}^{8}\log 4$

c ${}^{2}\log\sqrt[3]{4}$

d $2 + {}^{2}\log 4$

2 Bewering: ${}^{3}\log 7 = \dfrac{1}{{}^{7}\log 3}$.

Is deze bewering juist?

3 Los x op uit:

a ${}^{2}\log 3 = {}^{8}\log x$

b $\dfrac{{}^{3}\log 9x}{{}^{3}\log x} = {}^{3}\log 9$

c ${}^{\frac{1}{2}}\log \dfrac{2 - x}{x + 4} = 2$

d ${}^{2}\log x + {}^{4}\log x = 1$

4 Bewering: ${}^{3}\log a + \frac{1}{2} \cdot {}^{\frac{1}{3}}\log b = {}^{3}\log \dfrac{a}{\sqrt{b}}$.

Is deze bewering juist?

5 Bewering: ${}^{8}\log 16 + {}^{8}\log 4 = 2$.

Is deze bewering juist?

6 Bewering: Voor alle $x > 1$ geldt: ${}^{3^{-2}}\log (x - 1) = {}^{3}\log (x - 1)^{-\frac{1}{2}}$

Is deze bewering juist?

Praktijksituatie

Geluidssterkte
Geluidsintensiteit

Het verband tussen de geluidssterkte L (in decibel: dB) en de geluidsintensiteit I (in W/m^2) wordt gegeven door de formule $L = 10 \cdot \log \left(\dfrac{I}{I_0}\right)$. Hierin is I_0 de standaard-geluidsintensiteit van 10^{-12} W/m^2, zodat $L = 10 \cdot \log \left(\dfrac{I}{10^{-12}}\right)$.

Verder geldt: als een geluidsbron A op een bepaalde plaats een geluidsintensiteit I_A veroorzaakt en een tweede geluidsbron B op diezelfde plaats een geluidsintensiteit I_B, dan veroorzaken ze samen een geluidsintensiteit $I_{totaal} = I_A + I_B$.

Geluidsintensiteiten mogen dus opgeteld worden, geluidssterkten daarentegen niet.

We berekenen nu het volgende:

1 Als een bepaalde geluidsbron zorgt voor een geluidsintensiteit van $I = 2 \cdot 10^{-5}$ W/m^2, dan berekenen we de geluidssterkte als volgt:

$$L = 10 \cdot \log \left(\frac{2 \cdot 10^{-5}}{10^{-12}}\right) = 10 \cdot \log (2 \cdot 10^{7}) = 73 \text{ dB}$$

2 Als een geluidsbron een geluidssterkte veroorzaakt van $L = 70$ dB en er wordt geluidsisolatie toegepast waardoor ter plaatse de geluidsintensiteit I wordt gehalveerd, dan kunnen we de ‘nieuwe’ geluidssterkte L' berekenen. In de oude situatie zonder geluidsisolatie geldt:

$$70 = 10 \cdot \log\left(\frac{I}{10^{-12}}\right) \Leftrightarrow \log\left(\frac{I}{10^{-12}}\right) = 7 \Leftrightarrow \frac{I}{10^{-12}} = 10^{7}$$
$$\Leftrightarrow I = 10^{-5}\ \text{W/m}^2$$

In de nieuwe situatie met geluidsisolatie geldt: $I' = \frac{1}{2} \cdot 10^{-5}$ W/m^2, zodat we L' kunnen berekenen:

$$L' = 10 \cdot \log\left(\frac{\frac{1}{2} \cdot 10^{-5}}{10^{-12}}\right) = 10 \cdot \log\left(\tfrac{1}{2} \cdot 10^{7}\right) \approx 67\ \text{dB}$$

Dit is een verrassend resultaat: door geluidsisolatie wordt de geluidsintensiteit gehalveerd, maar de geluidssterkte loopt met slechts 5% terug van 73 dB naar 67 dB.

1.4.1 Definitie van logaritme

UITLEG

In de uitdrukking

$g^x = a$

Machtsverheffen

berekenen we de uitkomst a door het getal g te verheffen tot de macht x. Deze bewerking heet machtsverheffen: we noemen g het grondtal en x de exponent. Met $g = 10$ en $x = 2$ kunnen we a berekenen: $a = 10^2 = 100$.
Het kan echter ook anders: we kunnen ook vragen bij gegeven grondtal g en uitkomst a de onbekende exponent x te zoeken. Bijvoorbeeld als $g = 3$ en $a = 81$, dus $3^x = 81$, wordt gevraagd tot welke macht we 3 moeten verheffen om de uitkomst 81 te krijgen. Het vinden van deze uitkomst (in dit geval $x = 4$) heet: 'logaritme nemen'. We gebruiken hiervoor de notatie:

Logaritme

$x = {}^{g}\log a$

Definitie

In de uitdrukking $x = {}^{g}\log a$ is x de macht waartoe ik g moet verheffen om de waarde a te krijgen: $g^x = a$. Een logaritme is dus een exponent. Het getal g heet het grondtal, het getal a heet het argument. Nederland is nog een van de weinige landen die het grondtal boven de log noteren. De meeste landen noteren: $x = \log_g a$

Voorbeelden

1 We berekenen ${}^{2}\log 8$ met behulp van de definitie:
${}^{2}\log 8 = x \Leftrightarrow 2^x = 8 \Leftrightarrow 2^x = 2^3 \Leftrightarrow x = 3$
(controle: $2^3 = 8$)

2 Evenzo berekenen we ${}^{10}\log 1\,000$:
${}^{10}\log 1\,000 = x \Leftrightarrow 10^x = 1\,000 \Leftrightarrow 10^x = 10^3 \Leftrightarrow x = 3$
(controle: $10^3 = 1\,000$)

3 Evenzo geldt ${}^{3}\log 81 = 4$, want $3^4 = 81$.

4 En ook ${}^{4}\log 2 = \frac{1}{2}$, want $4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2$.

Opdracht **1** Bereken zonder rekenmachine:

a ${}^{4}\log 64$
b ${}^{10}\log 10$
c ${}^{3}\log 1$
d ${}^{9}\log \frac{1}{3}$
e ${}^{10}\log 0{,}1$
f ${}^{2}\log 4$
g ${}^{3}\log \frac{1}{9}$
h ${}^{5}\log 125$
i ${}^{4}\log \frac{1}{4}$
j ${}^{6}\log 6$

Bovenstaande definitie en voorbeelden leiden tot twee gelijkwaardige uitdrukkingen:

Om de exponent x van een machtsverheffing met grondtal g te bepalen, terwijl de uitkomst a bekend is, gebruiken we de logaritme. In formulevorm wordt dat vastgelegd in twee gelijkwaardige uitdrukkingen:

$g^x = a \Leftrightarrow x = {}^{g}\log a$

1 We berekenen ${}^{4}\log 2\sqrt{2}$ met behulp van de definitie:

$${}^{4}\log 2\sqrt{2} = x \Leftrightarrow 4^x = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow (2^2)^x = 2^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow 2^{2x} = 2^{\frac{3}{2}}$$
$$\Leftrightarrow 2x = \tfrac{3}{2} \Leftrightarrow x = \tfrac{3}{4}$$

2 We berekenen ${}^{2}\log \sqrt[3]{4}$ met behulp van de definitie:

$${}^{2}\log \sqrt[3]{4} = x \Leftrightarrow 2^x = \sqrt[3]{4} \Leftrightarrow 2^x = 4^{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow 2^x = (2^2)^{\frac{1}{3}}$$
$$\Leftrightarrow 2^x = 2^{\frac{2}{3}} \Leftrightarrow x = \tfrac{2}{3}$$

3 Als ${}^{\frac{1}{4}}\log a = -2$, dan berekenen we a met behulp van de definitie:

$$a = (\tfrac{1}{4})^{-2} = 4^2 = 16$$

4 Als ${}^{g}\log \frac{1}{16} = -2$, dan berekenen we g met behulp van de definitie:

$$g^{-2} = \tfrac{1}{16} \Leftrightarrow g = (\tfrac{1}{16})^{-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow g = 16^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow g = 4$$

5 ${}^{-2}\log 8$ bestaat niet, want er is geen macht te vinden waartoe je –2 kunt verheffen om 8 te krijgen. Omdat $(-2)^3 = -8$, zouden we nog kunnen schrijven: ${}^{-2}\log(-8) = 3$

6 ${}^{4}\log(-16)$ bestaat niet, want geen enkele machtsverheffing met 4 als grondtal heeft –16 als uitkomst.

7 ${}^{1}\log 2$ bestaat niet, want tot welke macht we 1 ook verheffen, er komt altijd 1 uit.

8 ${}^{0}\log 2$ bestaat niet, want tot welke macht we 0 ook verheffen, er komt altijd 0 uit.

SAMENVATTING

Als in de uitdrukking ${}^{g}\log a = x$ één van de grootheden a, g of x onbekend is en de andere twee bekend zijn, dan kunnen we met behulp van de definiërende uitspraken

$$g^x = a \Leftrightarrow x = {}^{g}\log a$$

die onbekende grootheid berekenen.
Het grondtal g van de logaritme moet positief en ongelijk 1 zijn.
Het argument a van de logaritme moet altijd positief zijn.

VRAAGSTUKKEN

Logaritmen met grondtal 10 heten gewone logaritmen of Briggse logaritmen (genoemd naar Henry Briggs, 1561–1631). Als een logaritme zonder grondtal wordt genoteerd, dan wordt de logaritme met grondtal 10 bedoeld. Op je rekenmachine is de functietoets 'log' de toets om een Briggse logaritme mee te berekenen.

1.65 Bereken zonder rekenmachine:

a ${}^{2}\log 16$
b ${}^{2}\log \frac{1}{2}$
c ${}^{10}\log 1\,000\,000$
d ${}^{5}\log \frac{1}{125}$
e ${}^{4}\log (64)^{-1}$
f ${}^{3}\log \sqrt{3}$
g ${}^{7}\log 1$
h ${}^{7}\log 7$
i ${}^{7}\log \sqrt{7}$

1.66 Bereken zonder rekenmachine:

a ${}^{\frac{1}{4}}\log 4$
b ${}^{\frac{1}{\pi}}\log \pi^2$
c ${}^{\frac{1}{2}}\log \frac{1}{8}$
d ${}^{\frac{1}{8}}\log \frac{1}{2}$
e ${}^{64}\log \frac{1}{16}$
f ${}^{81}\log 9$

1.67 Bereken a zonder rekenmachine, als

a ${}^{4}\log a = -1$
b ${}^{4}\log a = -2$
c ${}^{2}\log a = 10$
d ${}^{4}\log a = 0$
e ${}^{3}\log a = \frac{1}{3}$
f ${}^{-3}\log a = 2$

1.68 Bereken g zonder rekenmachine, als

a ${}^{g}\log 5 = 1$
b ${}^{g}\log 2 = \frac{1}{3}$
c ${}^{g}\log \frac{1}{4} = -2$
d ${}^{g}\log (-\frac{1}{8}) = 3$
e ${}^{g}\log \frac{1}{100} = -2$
f ${}^{g}\log 3\sqrt{3} = 1\frac{1}{2}$

1.69 Bereken met een rekenmachine:

a $\log 2$
b $\log 3$
c $\log 10$
d $\log 10\,000$

1.70 In een ruimte zijn twee geluidsbronnen A en B. A zorgt voor een geluidssterkte van 70 dB, B zorgt voor een geluidssterkte van 80 dB.

a Bereken de geluidsintensiteiten I_A en I_B.
b Bereken de totale geluidsintensiteit in deze ruimte.
c Toon aan dat de totale geluidssterkte 80,4 dB bedraagt.

1.4.2 Eigenschappen van logaritmen

UITLEG

Met betrekking van de definitie weten we nu dat ${}^{10}\log 100 = 2$, want $10^2 = 100$. Als we de exponent 2 uit deze machtsverheffing vervangen door de bijbehorende logaritme krijgen we:

$10^{{}^{10}\log 100} = 100$

We kunnen dit gebruiken voor de volgende eigenschap (met letters in plaats van getallen):

Eigenschap **I 1** $g^{{}^{g}\log a} = a \quad (a > 0,\ g > 0,\ g \neq 1)$

Dit betekent dat als we van een zeker getal a de waarde ${}^{g}\log a$ bepalen en we gebruiken de uitkomst hiervan weer als exponent in een machtsverheffing met hetzelfde grondtal, dan krijgen we dat oorspronkelijke getal a terug.

1 We kunnen berekenen dat ${}^{2}\log 4 = 2$ en dat ${}^{2}\log 8 = 3$. Als we deze twee logaritmen optellen krijgen we:

${}^{2}\log 4 + {}^{2}\log 8 = 2 + 3 = 5$

Nu is 5 ook gelijk aan ${}^{2}\log 32$, ofwel

${}^{2}\log 4 + {}^{2}\log 8 = {}^{2}\log (4 \cdot 8) = {}^{2}\log 32$

2 Op dezelfde manier herschrijven we:
a ${}^{4}\log 3 + {}^{4}\log 5 = {}^{4}\log 15$
b $2 + {}^{3}\log 5 = {}^{3}\log 9 + {}^{3}\log 5 = {}^{3}\log 45$

(We hebben 2 geschreven als logaritme met grondtal 3 : ${}^{3}\log 9$)

Opdracht 2 Schrijf zonder rekenmachine als één logaritme:

a ${}^{3}\log 3 + {}^{3}\log 9$

b ${}^{5}\log 10 + {}^{5}\log 20$

c $3 + {}^{2}\log 16$

We komen hiermee tot eigenschap 2.

Eigenschap **I 2** ${}^{g}\log a + {}^{g}\log b = {}^{g}\log ab \quad (a > 0$ en $b > 0)$

Bewijs:
Noem ${}^{g}\log a = x_1$ en ${}^{g}\log b = x_2$, dan geldt dat:

$g^{x_1} = a$ en $g^{x_2} = b$, zodat $ab = g^{x_1} \cdot g^{x_2} = g^{x_1 + x_2}$

M.b.v. de definitie van de logaritme kunnen we nu afleiden:

$ab = g^{x_1 + x_2} \Leftrightarrow {}^{g}\log ab = x_1 + x_2 = {}^{g}\log a + {}^{g}\log b$

We kunnen de twee logaritmen ${}^2\log 4$ en ${}^2\log 8$ uit het vorige voorbeeld 1 ook van elkaar aftrekken. We krijgen dan:

$${}^2\log 4 - {}^2\log 8 = 2 - 3 = -1$$

Nu is $-1 = {}^2\log \frac{1}{2}$, ofwel

$${}^2\log 4 - {}^2\log 8 = {}^2\log \left(\tfrac{4}{8}\right) = {}^2\log \tfrac{1}{2}$$

Opdracht

3 Schrijf zonder rekenmachine als één logaritme:

a ${}^2\log 2 - {}^2\log 64$

b ${}^3\log 9 - {}^3\log \sqrt{3}$

c ${}^2\log 8 - 1$

d $4 - {}^2\log 4$

We komen hiermee tot eigenschap 3.

Eigenschap

3 $\boldsymbol{{}^g\log a - {}^g\log b = {}^g\log \frac{a}{b}}$ **($a > 0$ en $b > 0$)**

Bewijs:
Noem ${}^g\log a = x_1$ en ${}^g\log b = x_2$, dan geldt dat:

$$g^{x_1} = a \text{ en } g^{x_2} = b, \text{ zodat } \frac{a}{b} = \frac{g^{x_1}}{g^{x_2}} = g^{x_1 - x_2}$$

M.b.v. de definitie van de logaritme kunnen we afleiden:

$$\frac{a}{b} = g^{x_1 - x_2} \Leftrightarrow {}^g\log \frac{a}{b} = x_1 - x_2 = {}^g\log a - {}^g\log b$$

1 In dit voorbeeld willen we het verband laten zien tussen ${}^2\log 4$ en ${}^2\log 16$. M.b.v. de eigenschap ${}^g\log a + {}^g\log b = {}^g\log ab$ kunnen we schrijven:

$${}^2\log 4 + {}^2\log 4 = {}^2\log 16$$
$$\Leftrightarrow 2 \cdot {}^2\log 4 = {}^2\log 16$$
$$\Leftrightarrow 2 \cdot {}^2\log 4 = {}^2\log 4^2$$

2 Een dergelijk verband bestaat ook tussen ${}^2\log 4$ en ${}^2\log 64$:

$${}^2\log 4 + {}^2\log 4 + {}^2\log 4 = {}^2\log 64$$
$$\Leftrightarrow 3 \cdot {}^2\log 4 = {}^2\log 64$$
$$\Leftrightarrow 3 \cdot {}^2\log 4 = {}^2\log 4^3$$

We komen hiermee tot eigenschap 4:

Eigenschap

4 $\boldsymbol{p \cdot {}^g\log a = {}^g\log a^p}$ **($a > 0$)**

Bewijs:
We weten dat $a = g^{{}^g\log a}$
Linker- en rechterlid tot de macht p verheffen levert:

$$a^p = g^{p \cdot {}^g\log a}$$

Met behulp van de definitie van de logaritme is dit te herschrijven tot:

$$p \cdot {}^g\log a = {}^g\log a^p$$

In dit voorbeeld willen we laten zien hoe je bij logaritmen overstapt van het ene grondtal op het ander. Je hebt dit onder andere nodig om logaritmen met behulp van een rekenmachine te berekenen. We willen bijvoorbeeld ${}^{7}\log 3$ beschrijven met logaritmen met grondtal 5. Allereerst kunnen we met behulp van de definitie van de logaritme schrijven:

${}^{7}\log 3 = x \Leftrightarrow 7^x = 3 \quad [1]$

Er geldt nu, omdat $7^x = 3$

$\quad {}^{5}\log 7^x = {}^{5}\log 3 \quad$ (grondtal 5 willekeurig gekozen)

$\Leftrightarrow x \cdot {}^{5}\log 7 = {}^{5}\log 3 \quad$ (eigenschap 4: $p \cdot {}^{g}\log a = {}^{g}\log a^p$ toepassen)

$$\Leftrightarrow x = \frac{{}^{5}\log 3}{{}^{5}\log 7}$$

M.b.v. [1] geldt nu:

$${}^{7}\log 3 = \frac{{}^{5}\log 3}{{}^{5}\log 7}$$

Opdracht **4** Schrijf als logaritme(n) met grondtal 2:

a ${}^{7}\log 3$

b ${}^{3}\log 2$

c ${}^{5}\log 7$

d ${}^{4}\log 5$

Bovenstaand voorbeeld leidt tot eigenschap 5:

Eigenschap **I** **5** $\boldsymbol{{}^{b}\log a = \frac{{}^{g}\log a}{{}^{g}\log b}}$ **(*g* is een willekeurig grondtal)**

Voorbeelden

1 ${}^{g}\log a^2bc^3 = {}^{g}\log a^2 + {}^{g}\log b + {}^{g}\log c^3 = 2 \cdot {}^{g}\log a + {}^{g}\log b + 3 \cdot {}^{g}\log c$

2 ${}^{10}\log \frac{1}{\sqrt{10}} = {}^{10}\log 10^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} \cdot {}^{10}\log 10 = -\frac{1}{2} \cdot 1 = -\frac{1}{2}$

3 ${}^{g}\log \frac{a^2}{c\sqrt{b}} = 2 \cdot {}^{g}\log a - {}^{g}\log c - \frac{1}{2}\,{}^{g}\log b$

4 We berekenen met de rekenmachine ${}^{3}\log 7$.

Oplossing:

Omdat de rekenmachine de logaritme met grondtal 3 niet en de logaritme met grondtal 10 wel beschikbaar heeft, gebruiken we eigenschap 5 om op grondtal 10 over te stappen:

$${}^{3}\log 7 = \frac{{}^{10}\log 7}{{}^{10}\log 3} = \frac{\log 7}{\log 3} = \frac{0{,}8451}{0{,}4771} = 1{,}7712$$

We hebben de mogelijkheid om met behulp van een eenvoudige rekenmachine een logaritme te berekenen als we met behulp van eigenschap 5 op grondtal 10 overstappen.

John Napier (1550–1617)

Enkele belangrijke uitvindingen hebben de mensheid veel (dom) cijfer- en rekenwerk bespaard, hetgeen de ontwikkeling van de wetenschap flink heeft gestimuleerd. We noemen het Hindo-Arabisch cijfer- en letterschrift (dat we nu ook gebruiken, zie ook bij 'Fibonacci'), de decimale-breuknotatie, de logaritme en de computer.
De persoon die het woord logaritme het eerst gebruikte en ermee rekende was de Schotse burchtheer John Napier. Hij stond bekend als een scherpzinnige maar ook eigenzinnige figuur. Ook door hem is, net als door Simon Stevin, spitsvondig en futuristisch oorlogstuig ontworpen. Zo was hij de eerste die het principe van een onderzeeboot lanceerde, met tekeningen en 'devices of sailing under water'.
De belangrijkste reden om met logaritmen te gaan werken was de reductie van rekenwerk. Het principe daarvan werkte als volgt.
Ontwerp een enorme tabel waarin de logaritmen van alle getallen tussen 1 en bijvoorbeeld 10^7 staan.
Willen we twee getallen a en b met elkaar vermenigvuldigen, dan zoeken we van die getallen eerst de bijbehorende logaritmen: log (a) en log (b). Deze twee getallen tellen we op: log (a) + log (b). Van deze som zoeken we in de tabel op waarvan het de logaritme is. Stel dat dat de logaritme van c is; dus
log (c) = log (a) + log (b) of:
log (c) = log (ab), zodat $c = ab$. Op deze wijze hebben we twee getallen met elkaar vermenigvuldigd door één enkele optelling uit te voeren en wat te bladeren in een tabellenboek. Besef dat dit (toen) veel werk bespaarde, want het betreft vermenigvuldigingen van twee getallen van soms zeven cijfers. Deze uitvinding, die een paar jaar later door een Engelse professor (Henry Briggs) werd geperfectioneerd, heeft Napier binnen Europa een enorme populariteit bezorgd. Vooral het rekenwerk van de sterrenkundigen uit die tijd werd er enorm door bekort. Vóór deze uitvinding bestonden er ook wel tabellenboeken, maar die staken veel ingewikkelder in elkaar; ze berustten op een formule, waarbij ook een product in een som overgaat, te weten:
$\sin A \cdot \sin B = \frac{1}{2}(\cos(A - B) - \cos(A + B))$.
Deze formule is af te leiden uit de eigenschappen 8 en 9 uit paragraaf 1.5.3.
Zeer opmerkelijk is nog dat de logaritmen door Napier ontdekt zijn, lang voordat het begrip exponent bestond, terwijl het moderne begrip van logaritme geheel is opgebouwd rond het werken met exponenten, zoals we in deze leereenheid zien.
Napier gebruikte zijn wiskundige talenten als afleiding voor politieke en godsdienstige twisten die hij met iedereen voerde die het niet met hem eens was. Zo publiceerde hij in 1593 een bestseller (deze haalde 21 drukken) waarin hij aantoonde dat de paus een antichrist was en dat de wereld tussen 1688 en 1700 zou vergaan …

SAMENVATTING

We hebben tot nu toe de volgende eigenschappen geformuleerd:

1. $g^{^g\log a} = a$
2. ${}^g\log a + {}^g\log b = {}^g\log ab$
3. ${}^g\log a - {}^g\log b = {}^g\log \frac{a}{b}$
4. $p \cdot {}^g\log a = {}^g\log a^p$
5. ${}^b\log a = \dfrac{{}^g\log a}{{}^g\log b}$

VRAAGSTUKKEN

1.71 Schrijf als sommen en/of verschillen van logaritmen:

a $\log b^2d^2$

b $\log \dfrac{ac}{d^2}$

c $\log \dfrac{a^3}{b^3}$

d $\log \sqrt[3]{a^2b}$

e $\log \dfrac{\sqrt[4]{a^3}}{\sqrt[5]{a}}$

f $\log \left(\dfrac{a}{c}\right)^{\frac{1}{2}}$

g $\log \left(\dfrac{a^2}{c}\right)^3$

1.72 Bereken met behulp van een rekenmachine:

a ${}^5\log 3$

b ${}^7\log 2$

c ${}^3\log 51$

d ${}^8\log \pi$

e ${}^2\log 85$

f ${}^7\log \sqrt{29}$

1.4.3 Oplossen van logaritmische vergelijkingen

UITLEG

In de volgende voorbeelden gaat het om vergelijkingen waarin de onbekende voorkomt in het argument van de logaritme:

1 Uit ${}^3\log x = {}^3\log 5$ volgt (bijna vanzelfsprekend) $x = 5$.

2 In de vergelijking ${}^3\log x = {}^3\log 5 + {}^3\log 2$ tellen we eerst ${}^3\log 5$ en ${}^3\log 2$ op:

$${}^3\log x = {}^3\log 5 + {}^3\log 2 \;\Leftrightarrow\; {}^3\log x = {}^3\log 10 \Leftrightarrow x = 10$$

Opdracht **5** Los x op uit:

a ${}^2\log x = {}^2\log 3 + {}^2\log 7$

b ${}^4\log (2x + 1) = {}^4\log x + {}^4\log 3$

Eigenschap

6 Logaritmische vergelijkingen worden opgelost met behulp van de eigenschap:

$${}^g\log a = {}^g\log b \;\Leftrightarrow\; a = b$$

We moeten daarbij natuurlijk ook rekening houden met de in de vorige paragraaf genoemde bestaansvoorwaarden van logaritmen.

Voorbeelden

1 Los x op uit: ${}^{10}\log x^4 = 1 + {}^{10}\log 5 + {}^{10}\log x \;\; (x > 0)$

Oplossing:

${}^{10}\log x^4 = 1 + {}^{10}\log 5 + {}^{10}\log x$
$\Leftrightarrow 4 \cdot {}^{10}\log x = {}^{10}\log 10 + {}^{10}\log 5 + {}^{10}\log x$ en $x > 0$
$\Leftrightarrow 3 \cdot {}^{10}\log x = {}^{10}\log 10 + {}^{10}\log 5$ en $x > 0$
$\Leftrightarrow 3 \cdot {}^{10}\log x = {}^{10}\log 50$ en $x > 0$
$\Leftrightarrow {}^{10}\log x^3 = {}^{10}\log 50$ en $x > 0$
$\Leftrightarrow x^3 = 50$ en $x > 0$
$\Leftrightarrow x = \sqrt[3]{50}$

2 Los op de vergelijking $\log(x-3)+\log(2x-7)=\log 6$

Oplossing:
Vanwege de bestaansvoorwaarden van de logaritmen moet gelden: $x > 3\frac{1}{2}$.

$\log(x-3)+\log(2x-7)=\log 6$

$\Leftrightarrow \log((x-3)(2x-7))=\log 6$ en $x > 3\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \log(2x^2-13x+21)=\log 6$ en $x > 3\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow 2x^2-13x+21=6$ en $x > 3\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow 2x^2-13x+15=0$ en $x > 3\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x=5$ of $x=1\frac{1}{2}$ en $x > 3\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x=5$

Opdracht **6** Los x op uit:

a ${}^4\log x = 3 + {}^4\log 2$
b ${}^2\log x = {}^4\log 2x$

SAMENVATTING

Logaritmische vergelijking

Stappenplan voor het oplossen van een logaritmische vergelijking:
1. **Formuleer de bestaansvoorwaarden van de voorkomende logaritmen.**
2. **Herleid de vergelijking zodanig dat in linker- en rechterlid precies één logaritme staat, beide met hetzelfde grondtal.**
3. **Stel de argumenten aan elkaar gelijk en los deze nieuwe vergelijking op.**
4. **Toets de oplossingen aan de bestaansvoorwaarden.**

VRAAGSTUKKEN

1.73 Los x op uit de volgende vergelijkingen (alle letters stellen positieve getallen voor):

a $\log x = \log 4$
b $\log x = 2\log 2$
c $\log x = 3\log a + 2\log b$
d $\log x = 4\log a - 2\log b$
e $\log x = 2\log a + \log b + \log c - \log d$
f $\log x = -\log a + \log b - (\log c + \log d)$
g $\log(3x+2) = \log 3 + 2\log 2$
h $\log(3x) + 2 = \log 3 + 2\log 2$
i ${}^2\log x = 1$
j ${}^2\log x = 1 - {}^2\log 5$

1.74 Los x op uit de volgende vergelijkingen:

a ${}^2\log(3x+1) + {}^2\log(2x-1) = {}^2\log 20 - {}^2\log 5$
b ${}^{\frac{1}{2}}\log(2-x) + {}^{\frac{1}{2}}\log(3+2x) = {}^{\frac{1}{2}}\log 1$
c ${}^2\log(2x+1) = 1 + {}^2\log(\frac{1}{2}x^2 - 4)$
d ${}^2\log(x-1) = {}^4\log(4x-7)$
e ${}^{\frac{1}{3}}\log\left(\dfrac{3-x}{x+1}\right) = 3$

1.75 Los x op uit:

a $\log 3x = 6$
b $2\log x + 4\log y = 0$
c $3\log x + 2\log 3x = 3$
d ${}^2\log(x^2-2x+1) + {}^2\log(x+1) = {}^2\log 16$

Eindtoets

Gebruik bij deze toets geen rekenmachine!

1 Bereken:

a ${}^{8}\log 16$

b ${}^{2}\log 64$

c ${}^{3}\log \sqrt[5]{9}$

d $3 - {}^{2}\log 8$

2 Bewering: ${}^{\frac{1}{3}}\log 7 = \dfrac{-1}{{}^{7}\log 3}$.

Is deze bewering juist?

3 Los x op uit:

a ${}^{3}\log 2 = {}^{9}\log x$

b $\dfrac{{}^{3}\log 9x}{{}^{3}\log x} = {}^{\frac{1}{3}}\log 9$

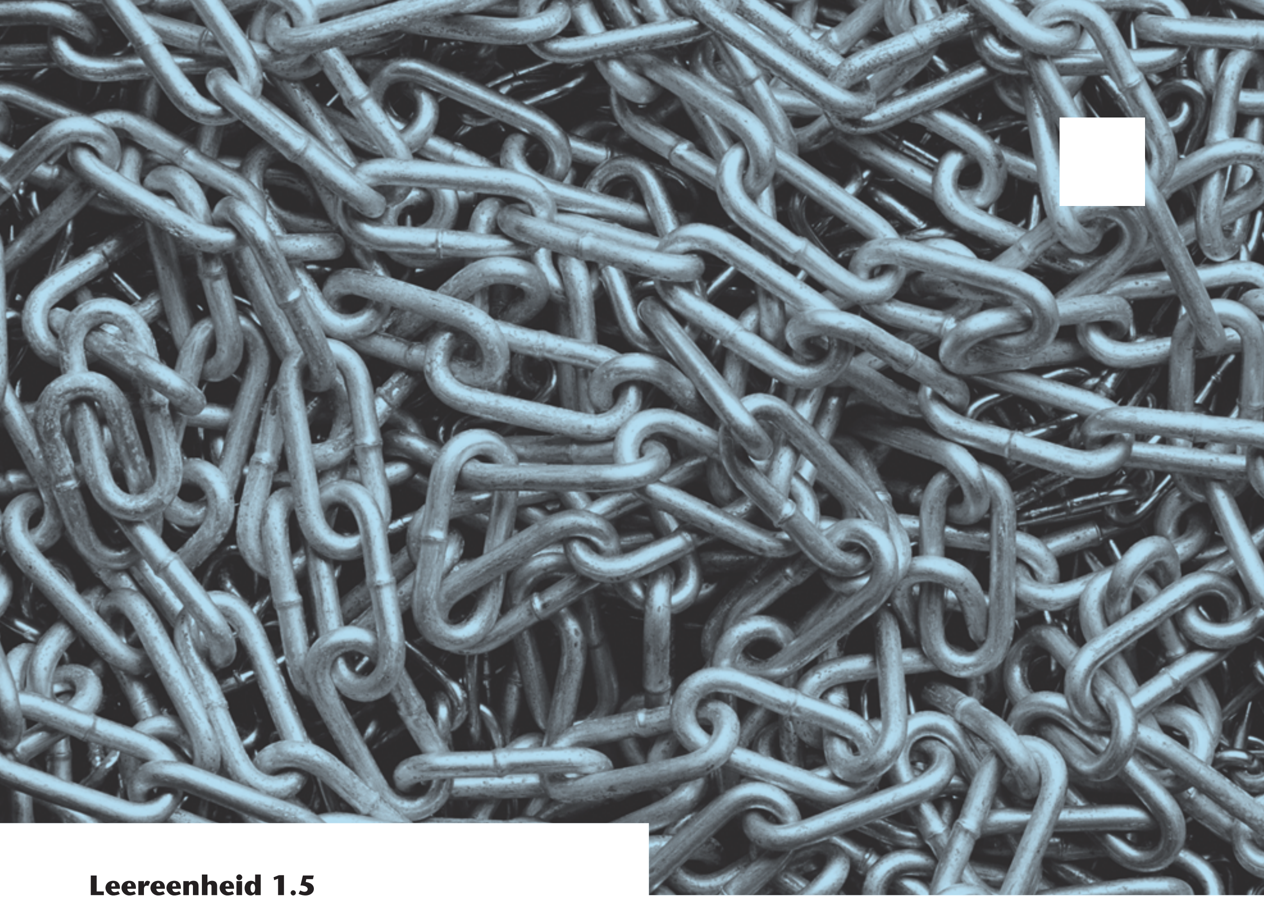
c ${}^{\frac{1}{2}}\log \dfrac{2+x}{x-4} = 2$

d ${}^{3}\log x - {}^{9}\log x = 2$

4 Bewering: ${}^{3}\log a + \frac{1}{2} \cdot {}^{\frac{1}{3}}\log b = {}^{\frac{1}{3}}\log \dfrac{\sqrt{b}}{a}$.
Is deze bewering juist?

5 Bewering: ${}^{8}\log 16 - {}^{8}\log 4 = 4$.
Is deze bewering juist?

6 Bewering: Met $a > 0$, $b > 0$ en $a \neq 1$ geldt: ${}^{a^2}\log b^2 = {}^{a}\log b$.
Is deze bewering juist?



Leereenheid 1.5

Rekenen met goniometrische verhoudingen

De leereenheid zal ongeveer 10 SBU's in beslag nemen.

In deze leereenheid wordt met verhoudingen gerekend om de grootte van hoeken aan te geven. Het zal blijken dat de grootte van een hoek vastligt door de verhouding van twee getallen en omgekeerd. Het is mogelijk afstanden te berekenen met gegeven hoeken. Onder meer bij het positiebepalen op zee, bij het in kaart brengen van woonwijken en in de sterrenkunde wordt hiervan gebruikgemaakt.
De leereenheid wordt onderverdeeld in:

- Basisbegrippen uit de goniometrie en de eenheidscirkel.
- Het begrip radiaal en de grafieken van sin, cos en tan.
- Andere eigenschappen van sin en cos: de verdubbelingsformules en de sinus- en cosinusregel.

Om deze leereenheid te kunnen uitvoeren moet je hoeken in graden kunnen opmeten.

Diagnostische toets

1 In onderstaande opgaven is de goniometrische verhouding van een hoek bekend en wordt de hoek gevraagd. Geef eerst aan in welke intervallen α kan liggen, in $[0, \frac{1}{2}\pi\rangle$, $[\frac{1}{2}\pi, \pi\rangle$, $[\pi, 1\frac{1}{2}\pi\rangle$ of in $[1\frac{1}{2}\pi, 2\pi]$. Bepaal daarna de grootte van de hoek.

a $\sin \alpha = -\frac{4}{7}$

b $\cos \alpha = 2{,}3$

c $\tan \alpha = -5\frac{2}{3}$

d $\sin \alpha = \frac{4}{5}$

2 Gegeven de driehoek ABC gelegen in een rechthoekig assenstelsel.
A = (–2, –1), B = (5, –1) en C = (1, 4). Welke betrekking(en) geldt/gelden voor $\angle$A:

a $\sin \angle A = -\dfrac{5}{\sqrt{34}}$

b $\tan \angle A = \frac{3}{5}$

c $\tan \angle A = -\frac{3}{5}$

d $\sin \angle A = \dfrac{5}{\sqrt{34}}$

3 Vul in:

a –70° = … rad

b 125° = … rad

c –275° = … rad

d $3\frac{1}{6}\pi$ rad = …°

e –0,85 rad = …°

f $6\frac{1}{3}\pi$ rad = …°

4 Vul in:

a cos 64° = sin …

b sin 212° = cos …

c cos 121° = –sin …

d sin 317° = –cos …

5 Bereken zonder rekenapparaat, door gebruik te maken van som- en/of verschilformules:

a sin 165° =

b cos 255° =

c sin (–285°) =

d tan 285° =

6 In $\triangle$ ABC is $b = 5$, $c = 6$ en $\alpha = 70°$.
Bereken a en β.

7 Gegeven $\triangle$ ABC met CD loodrecht op AB. AB = 7, AD = 3, BD = 4 en CD = 5.
Bereken cos $\angle$ C zonder rekenmachine.

8 Gegeven is $\cos t = \frac{3}{5}$, t in $[0, \frac{1}{2}\pi\rangle$. Ga na welke beweringen juist zijn.

a $\cos 4t = \frac{527}{625}$

b $\sin 2t = \frac{24}{7}$

c $\sin 4t = -\frac{336}{625}$

d $\sin t = \frac{4}{3}$

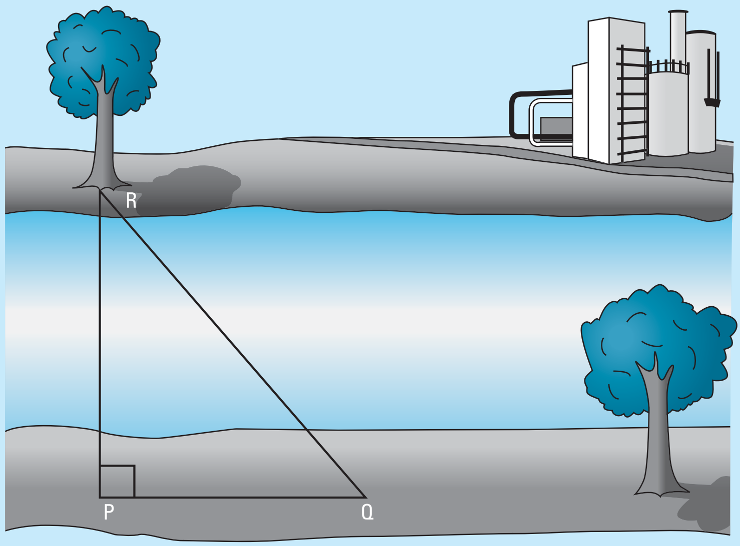
Praktijksituatie

De breedte van een rivier moet gemeten worden. Daarbij gaan we als volgt te werk, zie figuur 1.18. We nemen een vaste basis evenwijdig aan de rivier. Deze basis is PQ en we maken hem 20 m lang. De basis wordt zo gekozen dat het punt P recht tegenover een markant punt aan de overkant van de rivier ligt, in dit geval een boom. We zoeken dan naar de lengte van PR. Eerst wordt hoek PQR gemeten; deze blijkt 50° te zijn. Zo ontstaat een driehoek PQR met PQ = 20 m, $\angle$ P = 90° en $\angle$ Q = 50°.

$\tan \angle Q = \dfrac{PR}{PQ}$, zodat $PR = PQ \cdot \tan \angle Q = 20 \cdot 1{,}192 = 23{,}84$ m.

In deze praktijksituatie komt een basisbegrip uit de goniometrie, de tangens van een hoek, aan de orde.

Figuur 1.18 **Opmeten breedte van de rivier**

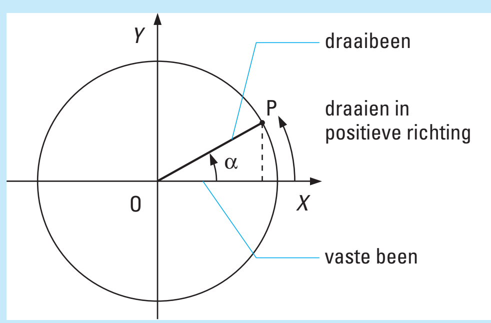


1.5.1 Basisbegrippen uit de goniometrie en de eenheidscirkel

We maken eerst de volgende afspraken, waarmee we het begrip 'hoek' vastleggen, zie figuur 1.19

Afspraken

Figuur 1.19 **Draaien van een hoek in positieve richting**



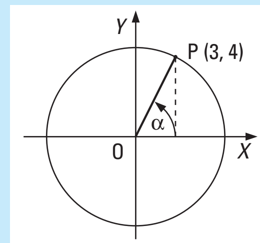
1. **Elke hoek wordt ingesloten door twee benen. Het ene been wordt *draaibeen* genoemd en het andere heet *vaste been*.**
2. **Elke hoek kan met zijn hoekpunt in de oorsprong O van een assenstelsel geplaatst worden en met het vaste been langs de *X*-as.**
3. **De hoek waarover gedraaid is, wordt aangeduid met de Griekse letter α, spreek uit: alfa; α wordt uitgedrukt in graden.**
4. **Het draaibeen kan in *positieve richting*, tegen de wijzerrichting in, gedraaid worden of in *negatieve richting*, met de wijzerrichting mee.**
5. **Onder de lengte van het draaibeen verstaan we de lengte van OP, zie figuur 1.19.**

In deze paragraaf zal blijken dat de grootte van een hoek volledig bepaald is door *de verhouding van de coördinaten* van een punt op het *draaibeen* of van *de verhouding van één coördinaat* van dat punt en *de lengte van dat draaibeen*. Ook het omgekeerde geldt: als een hoek gegeven is, dan is de verhouding van de coördinaten van een punt op het draaibeen bepaald of ligt de verhouding van een coördinaat van dat punt en de lengte van dat draaibeen vast. Om het een en ander duidelijk te maken, zijn eerst voorgaande afspraken gemaakt.

UITLEG

Uit de volgende voorbeelden en opdrachten is de theorie af te leiden met betrekking tot de basisbegrippen sinus, cosinus en tangens.

Figuur 1.20 **Hoek α met op draaibeen een punt**



1 *Gegeven:*
Een hoek α met op het draaibeen een punt P(3 4), zie figuur 1.20.

Gevraagd:
De grootte van α.

Oplossing:
De grootte van de hoek wordt bepaald met:

Tangens

a de verhouding tussen *y*- en de *x-coördinaat* van het punt P; deze is gelijk aan 1,3333. Deze verhouding wordt *tangens* genoemd, afgekort met *tan*. Met het rekenapparaat wordt de hoek als volgt gevonden:[1]

1,3333	shift	tan	≈ 53,13°

Sinus

b de verhouding tussen *y-coördinaat* van het punt P en de *lengte van het draaibeen* OP. De lengte van OP is gelijk aan 5. De verhouding is dan gelijk aan 0,8. Deze verhouding wordt *sinus* genoemd, afgekort met *sin*. Met het rekenapparaat wordt de hoek als volgt berekend:

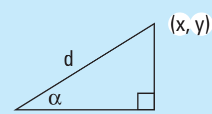
0,8	shift	sin	≈ 53,13°

Cosinus

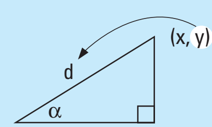
c de verhouding tussen de *x-coördinaat* en de *lengte van het draaibeen* OP. Deze verhouding is gelijk aan 0,6 en wordt *cosinus* genoemd, afgekort met *cos*. Met het rekenapparaat wordt de hoek als volgt berekend:

0,6	shift	cos	≈53,13°

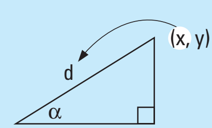
Figuur 1.21 **Tangens, sinus en cosinus**



$$\tan \alpha = \frac{y\text{-coördinaat}}{x\text{-coördinaat}} \quad \text{(tyx)}$$



$$\sin \alpha = \frac{y\text{-coördinaat}}{\text{lengte draaibeen}} \quad \text{(syd)}$$



$$\cos \alpha = \frac{x\text{-coördinaat}}{\text{lengte draaibeen}} \quad \text{(cxd)}$$

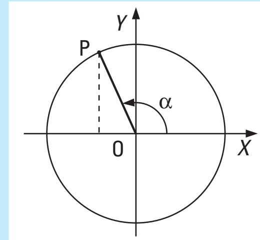
1 Er zijn rekenapparaten, waar in plaats van de shift-toets, de 2nd- of de inv-toets gebruikt moet worden! De modus voor hoekgrootte is ingesteld op graden.

2 *Gegeven:*
Een hoek α, met α = 120°, zie figuur 1.22.

Gevraagd:
De verhouding tussen de *x*-coördinaat van het punt P en de lengte van het draaibeen.

Oplossing:
Uit de situatietekening is af te leiden dat de gevraagde verhouding negatief is.
De verhouding wordt berekend met de cosinus:
cos α = cos 120° = –0,5, d.w.z. dat de verhoudingen tussen x_p en OP gelijk is aan –0,5 : 1.

Figuur 1.22 **–2 = 120°**

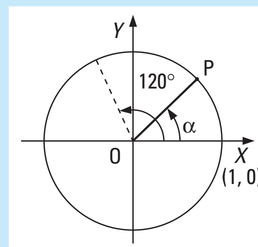


3 *Gegeven:*
Een cirkel met straal 1, zie figuur 1.23.
Het punt P doorloopt deze cirkel met een constante snelheid in positieve richting.
Na 12 seconden is de hele cirkel, 360°, doorlopen. Er wordt gestart in punt (1, 0).

Gevraagd:
De grootte van de draaihoek α na 4 seconden en de coördinaten van P.

Oplossing:
Na 4 seconden is een derde deel van de cirkel afgelegd. De draaihoek α is dan 120°.
De coördinaten van P zijn te berekenen met de tangens. tan 120° ≈ –1,73.
De verhouding tussen *y*-coördinaat, y_P, en *x*-coördinaat, x_P, is gelijk aan –1,73. Dat wil zeggen $y_P : x_P = 1{,}73 : -1$. Het punt met coördinaten (–1; 1,73) ligt op de cirkel met straal 2,00. P ligt echter op de cirkel met straal 1, de *eenheidscirkel*. De coördinaten van P zijn dan (–0,5; 0,87).

Figuur 1.23 **Berekenen van α**



Opmerking:
Eenheidscirkel
In voorgaande situaties is uitgegaan van een cirkel met middelpunt O (0, 0) en straal 1, de *eenheidscirkel*. Dat blijkt handig voor het berekenen van hoeken en van de goniometrische verhoudingen sin en cos.

In de voorgaande voorbeelden is bij de meting van de hoeken gebruik gemaakt van de graad als hoekeenheid. Hierbij gaat men uit van een verdeling van een cirkel in 360 stukken. Het vermoeden bestaat dat deze verdeling afkomstig is uit de astronomie. In de Soemerische periode (2100 voor Christus) verdeelden de astronomen een jaar in 12 maanden van elk 30 dagen. De Soemeriërs rekenden namelijk met het zestigtallig stelsel, een talstelsel waar we allemaal ervaring mee hebben. Denk maar eens aan het klokrekenen. Zo rekenen we ook zestigtallig met hoeken, die we in graden, minuten, en seconden verdelen.Wij beperken ons bij hoekmeting tot graden. In dit hoofdstuk zullen we met nog een andere eenheid kennis maken namelijk de radiaal afgekort met rad. In de landmeetkunde wordt met nog een andere hoekmaat gerekend. Een rechte hoek is daar in 100 graden verdeeld.

Deze landmetersgraden worden kortweg aangeduid met grad. Dus 90° = 100 grad.

Opdrachten

1 Bepaal met het rekenapparaat de grootte van de hoek in graden als gegeven is dat op het draaibeen een punt P $(1, \sqrt{3})$ ligt. Voer de berekening uit met behulp van tan, sin en cos.
Tip: Maak een situatietekening!

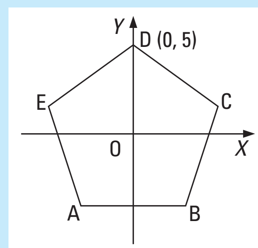
2 Geef eerst aan of onderstaande verhoudingen negatief of positief zijn en bereken ze daarna met de rekenmachine.
a sin 150°
b cos 200°
c tan 310°
d sin (–100°)

3 *Gegeven:*
Een regelmatige vijfhoek ABCDE, zie figuur 1.24. Het 'middelpunt' ligt in O (0, 0). De afstanden van O tot de hoekpunten zijn gelijk aan 5.

Gevraagd:
De coördinaten van de hoekpunten.

Tip: Bereken eerst ∠DOC, vervolgens ∠XOC en tot slot de coördinaten van C. Ga op soortgelijke wijze te werk met punt B. De coördinaten van de punten A en E zijn dan makkelijker te bepalen!

Figuur 1.24 **Regelmatige vijfhoek**



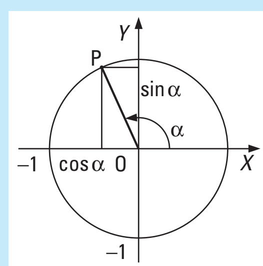
SAMENVATTING

Gegeven een hoek α, zie figuur 1.25.
Het draaibeen snijdt de eenheidscirkel in P met coördinaten (x_p, y_p) Omdat OP = 1 geldt nu dat:

$\sin \alpha = y_P$	$\alpha =$	y_p: OP	shift	sin
$\sin \alpha = x_P$	$\alpha =$	x_p: OP	shift	cos
$\sin \alpha = \dfrac{y_P}{x_P}$	$\alpha =$	y_p: x_p	shift	tan

Opmerking
Omdat in dit geval de eenheidscirkel van toepassing is, kan OP vervangen worden door 1; dus $\boxed{y_p\text{: OP}}$ wordt $\boxed{y_p}$ en $\boxed{x_p\text{: OP}}$ wordt $\boxed{x_p}$.

Figuur 1.25 **Cirkel met hoek *x***



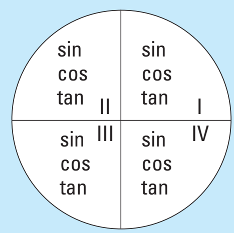
VRAAGSTUKKEN

1.76 Vul in tabel 1.5 de exacte verhoudingen in. Onder de tabel staat de eenheidscirkel verdeeld in vier kwadranten. Vul tevens in die kwadranten in of de verhoudingen daar positief (+) of negatief (–) zijn.

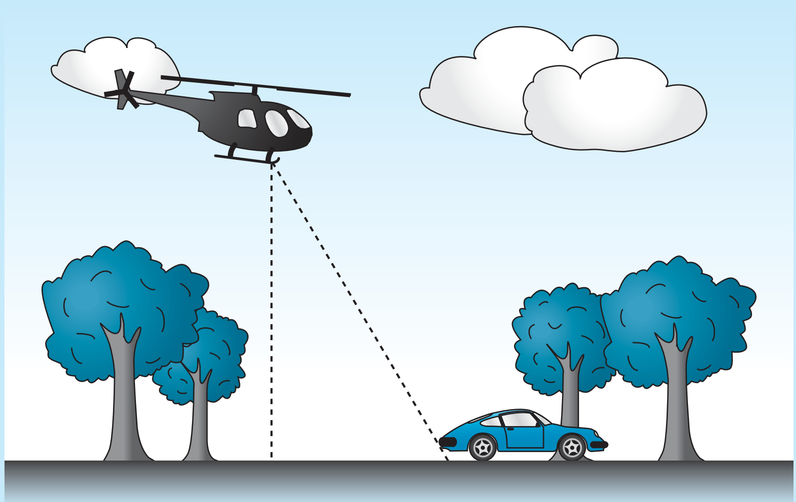
Tabel 1.5 **De exacte uitkomsten van de verhoudingen van sin, cos en tan**

	30°	45°	60°	90°
Sin				
Cos				
Tan				
	120°	**135°**	**150°**	**180°**
Sin				
Cos				
Tan				
	210°	**225°**	**240°**	**270°**
Sin				
Cos				
Tan				
	300°	**315°**	**330°**	**360°**
Sin				
Cos				
Tan				

1.77 Teken in een assenstelsel een regelmatige zeshoek. De oorsprong *O* (0, 0) ligt precies in het midden van de zeshoek. Bereken de coördinaten van deze zeshoek, als de afstanden van *O* tot de hoekpunten gelijk zijn 7.



Figuur 1.26 **Achtervolging per helikopter**

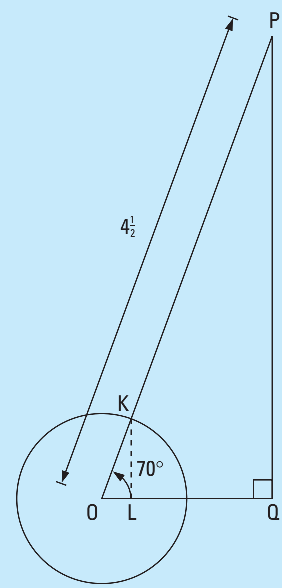


1.78 Een helikopter achtervolgt op een hoogte van 100 meter een auto. De afstand van de helikopter tot de auto bedraagt 115,5 meter. Onder welke hoek ziet de piloot de auto? De afstand van piloot tot het landingsgestel mag je verwaarlozen.

UITLEG

Bestudeer de volgende voorbeelden en stel de theorie eventueel bij.

Figuur 1.27 **Rechthoekige driehoek OPQ**



1 *Gegeven:*
Rechthoekige driehoek OPQ, zie figuur 1.27.
OP = $4\frac{1}{2}$ en $\angle$O = 70°.

Gevraagd:
De lengte van OQ.

Oplossing:
We brengen een eenheidscirkel aan met middelpunt O. De cirkel snijdt de schuine zijde van de driehoek in K. KL is een loodlijn op OQ. $\triangle$OKL is gelijkvormig met $\triangle$OPQ, d.w.z. dat alle overeenkomstige zijden van $\triangle$OPQ $4\frac{1}{2}$ keer zo lang zijn als die van $\triangle$OKL. De gevraagde lengte van OQ is dus $4\frac{1}{2}$ keer de lengte van OL. OL vinden we met de cosinus. Met het rekenapparaat vinden we cos 70° ≈ 0,3420.

Omdat $\frac{OL}{OK} \approx 0{,}3420$ geldt OL ≈ 0,3420. Dan is dus OQ ≈ 1,5390.

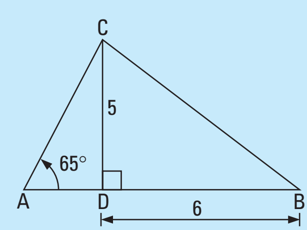
Merk op dat vanwege gelijkvormigheid geldt: $\frac{OL}{OK} = \frac{OQ}{OP} \approx 0{,}3420$.

Voor het rekenen in driehoeken hebben we dus geen eenheidscirkel nodig, maar kunnen we volstaan met het berekenen van overeenkomstige verhoudingen tussen rechthoekszijden en tussen rechthoekszijden en schuine zijde.

2 *Gegeven:*
$\triangle$ABC met hoogtelijn CD,
$\angle$CAB = 65°, CD = 5 en BD = 6.

Gevraagd:
De lengte van AB en AC in twee decimalen nauwkeurig.

Figuur 1.28 **$\triangle$ABC met hoogtelijn CD**



Oplossing:
In de situatietekening, zie figuur 1.28, zijn de gegevens verwerkt. Voor AB geldt: AB = AD + DB. AD is te berekenen met tan 65°. AC kan dan berekend worden door ‘Pythagoras’ toe te passen in $\triangle$ADC.

De uitwerking wordt nu:

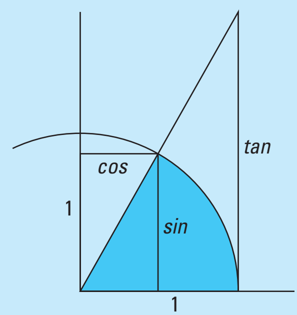
$$\tan 65° \approx 2{,}1445 = \frac{\text{overstaande rechthoekszijde}}{\text{aanliggende rechthoekszijde}}\text{; dus } \frac{CD}{AD} \approx 2{,}1445 \text{ en}$$

$$AD \approx \frac{CD}{2{,}1445} = \frac{5}{2{,}1445} \approx 2{,}3315. \text{ AB is dan } 8{,}33.$$

$$AC = \sqrt{25 + 5{,}4359} \approx 5{,}52$$

SAMENVATTING

Voor het toepassen van de goniometrische verhoudingen in *rechthoekige driehoeken*, zie figuur 1.29, gelden de volgende rekenregels ($0° < \alpha < 90°$):



Figuur 1.29 **Goniometrische verhouding in rechthoekige driehoek**

Rekenregels

1 $\sin \alpha = \dfrac{\textbf{lengte overstaande rechthoekszijde}}{\textbf{lengte schuine zijde}}$ **(SOS)**

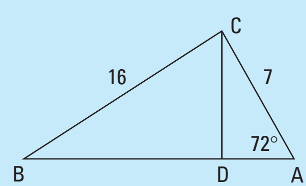
2 $\cos \alpha = \dfrac{\textbf{lengte aanliggende rechterhoekszijde}}{\textbf{lengte schuine zijde}}$ **(CAS)**

3 $\tan \alpha = \dfrac{\textbf{lengte overstaande rechtshoekszijde}}{\textbf{lengte aanliggende rechtshoekzijde}}$ **(TOA)**

VRAAGSTUKKEN

1.79 Gegeven een driehoek ABC. Bij hoek D zitten twee rechte hoeken, zie figuur 1.30. $AC = 7$, $BC = 16$ en $\angle A = 72°$.

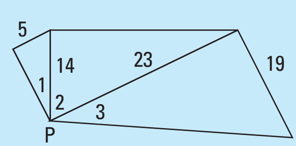
a Bereken CD.
b Bereken $\angle B$
c Bereken AB.



Figuur 1.30 **Driehoek ABC met twee rechte hoeken**

1.80 In figuur 1.31 zie je drie rechthoekige driehoeken.

a Bereken $\angle P_1$
b Bereken $\angle P_2$
c Bereken $\angle P_3$



Figuur 1.31 **Drie rechthoekige driehoeken**

1.81 Jan-Peter ziet de voet van een eikenboom onder een hoek van 3° met de horizon, zie figuur 1.32. Zijn ooghoogte is 1,7 meter. Hij ziet de top van deze boom onder een hoek van 11° met de horizon.

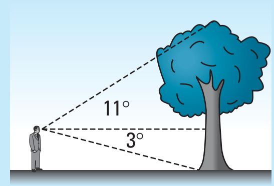
a Bereken de hoogte van de boom.

Hij gaat nu op een kist (0,5m hoog) staan.

b Bereken onder welke hoek met de horizon hij de voet van de boom nu ziet.

c Bereken ook onder welke hoek met de horizon hij de top van de boom nu ziet.

Figuur 1.32 **Afbeelding van man bij (eiken)boom**



1.82 Gegeven een rechthoekige driehoek ABC met $\angle CAB = 90°$, zie figuur 1.33.

a Bereken sin $\angle ABD$, als AC = 3 en BC = 4.

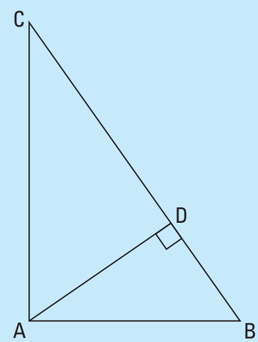
b Bereken cos $\angle ABD$, als AB = 2 en AC = 7.

c Bereken tan $\angle ABD$, als AB = 9 en AD = 4.

d Bereken $\angle DAB$, als AB = 7 en BC = 12.

e Bereken $\angle ABD$, als DB = 3 en AB = 5.

Figuur 1.33 **Driehoek ABC met $\angle CAB = 90°$**



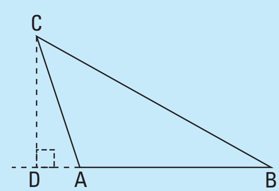
1.83 Gegeven een stomphoekige driehoek ABC die stomphoekig is in A, zie figuur 1.34. Van deze driehoek is $\angle ABC = 35°$, AB = 4 en CD = 3.

a Bereken BD.

b Bereken $\angle BAC$.

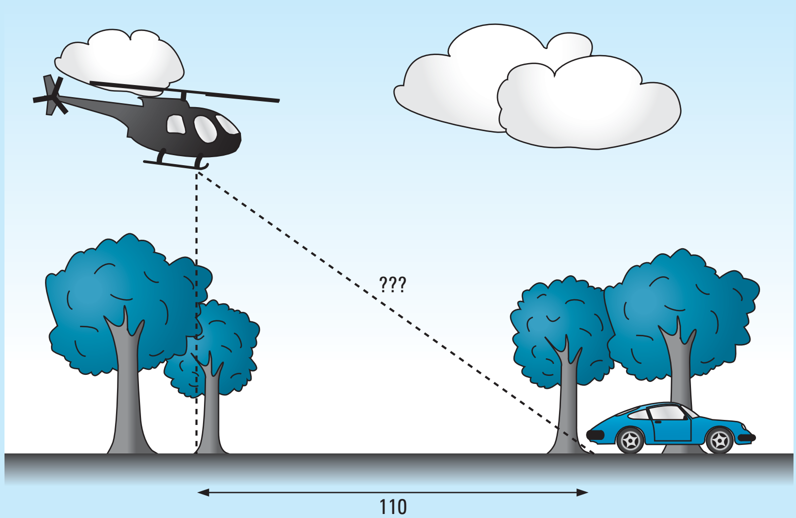
c Bereken BC.

Figuur 1.34 **Stomphoekige driehoek ABC**



1.84 Een helikopter achtervolgt een auto. De horizontale afstand tussen auto en helikopter bedraagt 110 meter. De piloot van de helikopter ziet de auto onder een hoek van 25° met de horizon.
Bepaal de hoogte waarop de helikopter vliegt en de afstand tussen auto en helikopter.

Figuur 1.35 **Achtervolging per helikopter**

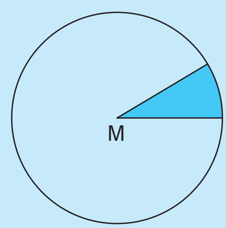


1.5.2. Het begrip radiaal of straalboog of straalhoek en de grafieken van sin, cos en tan

In de praktijk blijkt de hoekmaat aangegeven in graden niet altijd handig te zijn. Zo komt in de wiskunde de volgende betrekking wel eens voor, $y(t) = \frac{\sin(t)}{t}$.

De variabele t staat hier voor de grootte van de hoek. De eenheid graden waarin hoeken kunnen worden uitgedrukt, hoort niet tot het SI-stelsel. Daarom is de genoemde deling niet toegestaan als t wordt uitgedrukt in graden. Het ligt daarom meer voor de hand voor de hoekmaat een eenheid te kiezen, die geen dimensie heeft; een hoek ligt immers vast als een verhoudingsgetal. Deze eenheid is de *radiaal*, afgekort met *rad*. Wat een radiaal is en wat de relatie is tussen radiaal en graden komt in deze paragraaf aan de orde. Vervolgens komen de grafieken van sin t, cos t en tan t aan de orde, waarbij t is uitgedrukt in radialen. Alvorens naar de voorbeelden over te gaan, volgt hier een definitie.

Figuur 1.36 **Middelpuntshoek**



Radiaal

Definitie

Een *middelpuntshoek* is een hoek waarvan het hoekpunt in het midden van een cirkel ligt.

Middelpuntshoek

Hoek α uit paragraaf 1.5.1 was zo'n middelpuntshoek. Deze hoeken werden volledig bepaald door de x_P- en y_P-waarden. We gaan nu gebruikmaken van het feit dat de grootte van zo'n middelpuntshoek ook af te leiden is uit de lengte van de bijbehorende cirkelboog.

UITLEG

In de volgende voorbeelden met bijbehorende opdrachten kun je de relatie afleiden tussen de grootte van de hoek uitgedrukt in graden en de grootte van de hoek uitgedrukt in radialen. Tevens kan hieruit de theorie afgeleid worden met betrekking tot de kenmerken van de grafiek van sin en cos. We gaan ervan uit dat je nog weet dat de omtrek van een cirkel met straal r gelijk is aan $2\pi r$.

Een nieuwe maat om hoeken te meten, zie tabel 1.6.

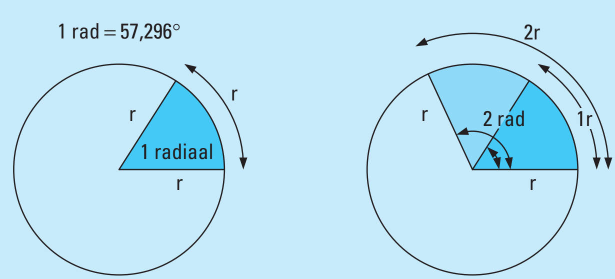
Tabel 1.6 **Omrekening graden naar radialen**

Straal cirkel	Middelpuntshoek gemeten in graden	Cirkelomtrek	Booglengte middelpuntshoek	Verhouding booglengte en straal
1	60°	2π	$\frac{60}{360} \cdot 2\pi = \frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$
8	60°	16π	$\frac{60}{360} \cdot 16\pi = \frac{8}{3}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$
1	120° (= 2 · 60°)	2π	$\frac{120}{360} \cdot 2\pi = \frac{2}{3}\pi$	$\frac{2}{3}\pi$ (= $2 \cdot \frac{1}{3}\pi$)
1	30° (= $\frac{1}{2}$ · 60°)	2π	$\frac{30}{360} \cdot 2\pi = \frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{6}\pi$ (= $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}\pi$)
1	80° (= 60° + 20°)	2π	$\frac{80}{360} \cdot 2\pi = \frac{2}{9}\pi$	$\frac{4}{9}\pi$ (= $\frac{1}{3}\pi + \frac{1}{9}\pi$)
1	57,296°	2π	$\frac{57{,}296}{360} \cdot 2\pi \approx 1{,}000\pi$	$\approx 1{,}000\pi$

Door de verhouding van de booglengte van een middelpuntshoek met de straal van de bijbehorende cirkel, ligt de grootte van de hoek ondubbelzinnig vast. Het ligt voor de hand, de grootte van de hoek waarvoor die verhouding gelijk is aan 1 als eenheid te nemen, zie figuur 1.37. Die eenheid noemen we *radiaal*, afgekort met *rad*.

Radiaal

Figuur 1.37 **Middelpuntshoek van 1 radiaal**



Definitie

1 rad is de grootte van de hoek waarvoor de verhouding tussen de booglengte en de straal gelijk is aan 1.

Een middelpuntshoek van rad 1 staat dus op een cirkelboog die net zo lang is als de straal van de cirkel. Uit tabel 1.5 blijkt, dat dit een prima eenheid is om hoeken mee te meten. De radiaal is dus een verhoudingsgetal zonder dimensie!

Als nu de hoek gegeven is in radialen, hoe druk je die hoek dan uit in graden?

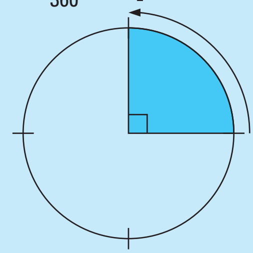
1 *Gegeven:*
Een hoek van 90°, zie figuur 1.38.

Gevraagd:
De grootte van de boog die bij deze hoek hoort als de straal van de cirkel gelijk is aan *r*.

Oplossing:
De omtrek van een cirkel met straal *r*, is gelijk aan $2\pi r$. Bij deze cirkel hoort een middelpuntshoek van 360°. Bij een middelpuntshoek van 360° hoort dus een booglengte van $2\pi r$. Bij een middelpuntshoek van 90°, $\frac{1}{4}$ deel van 360°, hoort dus een booglengte van $\frac{1}{2}\pi r$.
De verhouding tussen booglengte en straal van een middelpuntshoek van 90° is dus $\frac{1}{2}\pi$. Dus $90° \equiv \frac{1}{2}\pi$ rad.

Figuur 1.38 **Een hoek van 90°**

$$90° \equiv \frac{90}{360} \cdot 2\pi = \frac{1}{2}\pi$$



Alternatieve oplossing: de lengte van de boog van een middelpuntshoek is gelijk aan de grootte van de hoek × straal = $\frac{1}{2}\pi \cdot r$.

Wordt er gevraagd $\alpha°$ om te zetten in *x* radialen, dan kan dat uitgerekend worden met het verhoudingsschema $\frac{\alpha}{360} = \frac{x}{2\pi} \Rightarrow x = \frac{\alpha}{360} \cdot 2\pi$

We kunnen nu ook zinvol de grafieken tekenen van sin en cos.

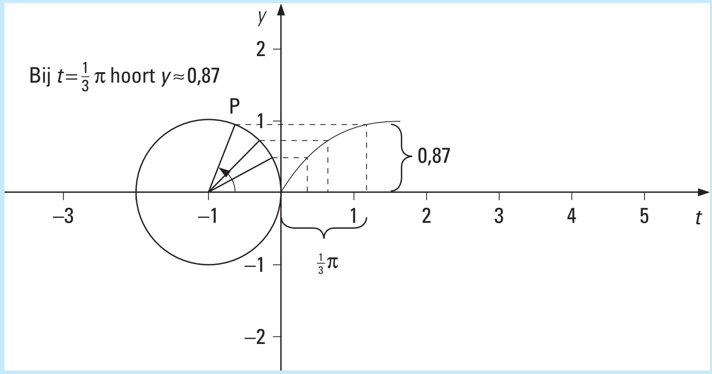
2 Het tekenen van de grafiek van $y = \sin t$.
- Volgens paragraaf 1.5.1 geldt in een eenheidscirkel $\sin t = y_P$.
- Het tekenen van de grafiek van $y = \sin t$ komt dus neer op het tekenen van punten met coördinaten (t, y_P), met *t* in radialen. In figuur 1.39 is dit voor enkele punten gedaan, zie ook tabel 1.7.

Tabel 1.7 **Functiewaarden van sin *t* met *t* in radialen**

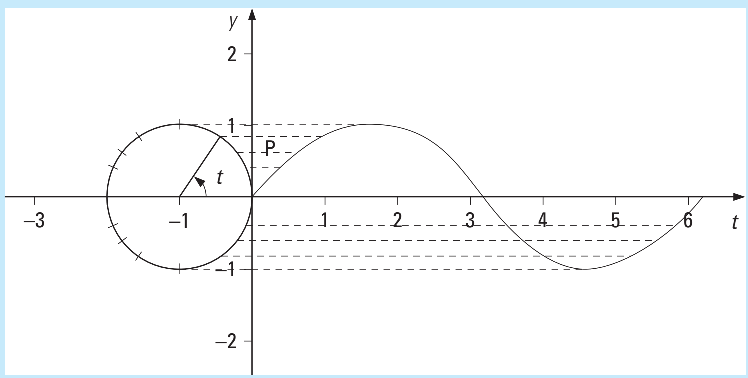
t	0π	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$
$\sin t = y_t$	0	0,5	0,71	0,87

Door op deze wijze de overige punten te tekenen, ontstaat de grafiek van $y = \sin t$, zie figuur 1.40.

Figuur 1.39 **Tekenen van grafiek van $y = \sin t$**



Figuur 1.40 **$y = \sin t$**



Opmerkingen

1 De grafiek is hier getekend door voor een aantal waarden van t de y_t-waarde te berekenen. Wat de t-waarden betreft, deze zijn gekozen uit het interval $[0, 2\pi]$. Voor waarden $t > 2\pi$ en $t < 0$ heeft de grafiek hetzelfde verloop. Als de grafiek van een functie zich steeds herhaalt, spreken we van een *periodieke functie*. De periode is hier 2π.

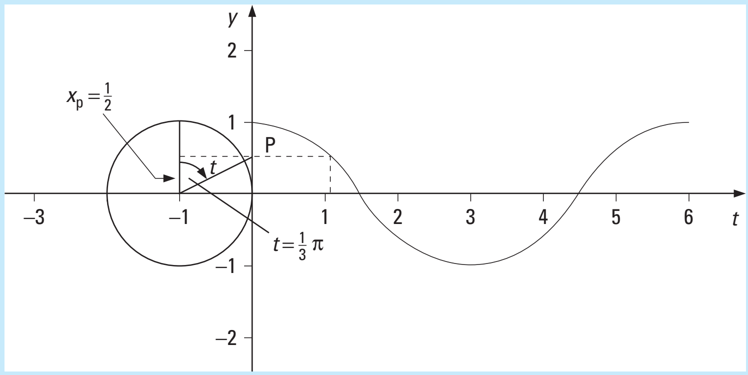
Periodieke functie

2 De grafiek op $[0, 2\pi]$ is puntsymmetrisch in $(\pi, 0) \approx (3{,}14; 0)$; bij puntspiegeling in het punt $(\pi, 0)$ ontstaat dezelfde grafiek. De grafiek op $[0, \pi]$ is lijnsymetrisch in de lijn $t = \frac{1}{2}\pi$, de grafiek op $[\pi, 2\pi]$ is lijnsymetrisch in de lijn $t = 1\frac{1}{2}\pi$, etc.

2 Op gelijke wijze verloopt het tekenen van de grafiek van $y = \cos t$.
- Volgens paragraaf 1.5.1 geldt $\cos t = x_P$.
- $\cos t$ komt dus neer op het tekenen van punten met coördinaten (t, x_P). In tabel 1.8 zijn een aantal coördinaten berekend.

Als we ook de overige punten tekenen, ontstaat de grafiek van $y = \cos t$, zie figuur 1.41.

Figuur 1.41 **$y = \cos t$**



Tabel 1.8 **Functiewaarden van cos *t* met *t* in radialen**

t	0π	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$
$\cos t = x_t$	1	0,87	0,71	0,50

Opmerkingen

1 de grafiek is hier getekend door voor een aantal waarden van t de x_t-waarde te berekenen. Wat de t-waarden betreft, deze zijn gekozen uit het interval $[0, 2\pi]$. Voor waarden $t > 2\pi$ en $t < 0$ heeft de grafiek hetzelfde verloop. De cosinusfunctie is dus ook een *periodieke functie* en ook hier is de periode 2π.

2 De grafiek op $[0, \pi]$ is puntsymetrisch in $(\frac{1}{2}\pi, 0)$, op $[\pi, 2\pi]$ puntsymetrisch in $(1\frac{1}{2}\pi, 0)$, enz. De grafiek is lijnsymmetrisch in de lijn $t = 0$, in de lijn $t = \pi$, enzovoort.

Het gebruik van het symbool π.

In 1647 gebruikte Oughtred het symbool d/π als verhouding van de diameter d van een cirkel tot zijn omtrek. David Gregory (1697) gebruikte π/r als ratio van de omtrek tot de straal r. Het eerste gebruik van π met de huidige betekenis was van een wiskundige uit Wales William Jones in 1706 wanneer hij schrijft: *3.14159 andc.* = π. Euler gebruikt het symbool in 1737 in zijn veel gelezen ‘Introductio’ en het werd snel de standaardnotatie.

William Jones
1675–1749

Opdrachten

4 Vul in:

a π rad $= \ldots\ldots\,^\circ$
b $\frac{1}{3}\pi$ rad $= \ldots\ldots\,^\circ$
c $\frac{2}{3}\pi$ rad $= \ldots\ldots\,^\circ$
d $\frac{1}{6}\pi$ rad $= \ldots\ldots\,^\circ$
e $1\frac{1}{6}\pi$ rad $= \ldots\ldots\,^\circ$
f $30^\circ = \ldots\ldots$ rad
g $90^\circ = \ldots\ldots$ rad
h $120^\circ = \ldots\ldots$ rad
i $150^\circ = \ldots\ldots$ rad
j $240^\circ = \ldots\ldots$ rad

5 a Teken nu zelf de grafiek van $y = \tan t$. Vul hiervoor eerst tabel 1.9 in.

Tabel 1.9 **Functiewaarden van tan *t* met *t* in radialen**

t	**0**	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$1\frac{1}{6}\pi$	$1\frac{1}{4}\pi$	$1\frac{1}{3}\pi$	$1\frac{1}{2}\pi$
tan *t*													

b Is de functie periodiek? Zo ja, hoe groot is dan de periode?
c Is de grafiek punt- en/of lijnsymmetrisch? Als de grafiek punt- en/of lijnsymmetrisch is, geef dan het punt of de lijn aan waarin de grafiek symmetrisch is.

Goniometrische functies leveren als uitkomst steeds een verhouding op. De uitkomst is dus een breuk. Een breuk met in de noemer het getal 0 is niet gedefinieerd.
d Voor welke t-waarden treedt deze situatie op? Wat is het gevolg hiervan voor de grafiek?

6 Andere karakteristieken van de grafieken van sin, cos en tan.
a Geef aan wanneer sin, cos en tan negatief dan wel positief zijn.
b Wat is het bereik van cos, sin en tan?
c Wat is het domein van tan?

Uit voorgaande voorbeelden en opdrachten is de volgende theorie af te leiden.

SAMENVATTING

1 Met het volgende verhoudingsschema kan een hoek van α° omgerekend worden in x radialen:

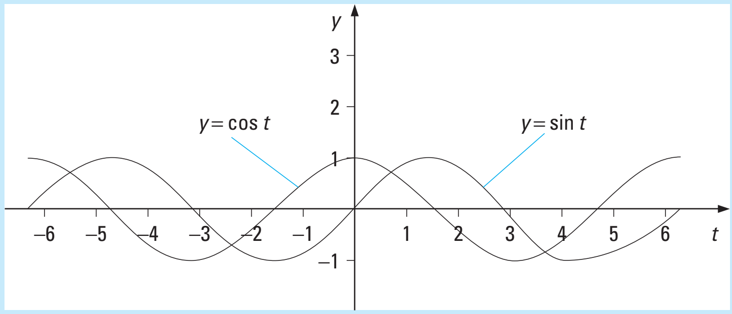
$$\frac{\alpha}{360} = \frac{x}{2\pi} \Rightarrow x = \frac{\alpha}{360} \cdot 2\pi \text{ rad}$$

2 Een hoek van 1 rad komt overeen met een hoek van $\left(\frac{1}{2\pi} \cdot 360\right)^\circ \approx 57^\circ$.

3 Zowel graden als radialen zijn verhoudingsgetallen en hebben dus geen dimensie.

4 Karakteristieken van de grafieken van $y = \sin t$ en $y = \cos t$, zie figuur 1.42:
a periode functies met periode 2π;
b lijn- en puntsymmetrische grafieken;
c het bereik is $[-1, 1]$;
d • $\sin t \geqq 0$ voor t in $[0, \pi]$ en $\sin t < 0$ voor t in $\langle \pi. 2\pi \rangle$;
• $\cos t \geqq 0$ voor t in $[0, \frac{1}{2}\pi]$ of t in $[1\frac{1}{2}\pi, 2\pi]$, $\cos t < 0$ voor t in $\langle \pi, 1\frac{1}{2}\pi \rangle$.

Figuur 1.42 **Grafiek van $y = \sin t$ en $y = \cos t$**



5 Karakteristieken van de grafiek van $y = \tan t$, zie figuur 1.43:

a een periodieke functie met periode π;

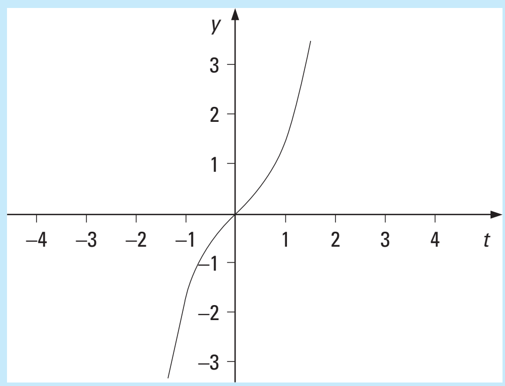
b puntsymmetrische grafiek in $(0, 0)$;

c het bereik is de verzameling $\mathbb{R}$;

d de grafiek heeft in $t = -\frac{1}{2}\pi$ en $t = \frac{1}{2}\pi$ een asymptoot;

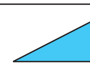
e $\tan t \geqq 0$ voor t in $[0, \frac{1}{2}\pi >$ en $\tan t < 0$ voor t in $\langle -\frac{1}{2}\pi, 0\rangle$.

Figuur 1.43 **Grafiek van $y = \tan t$**



VRAAGSTUKKEN

1.85 Vul het hiernaaststaande schema verder aan.

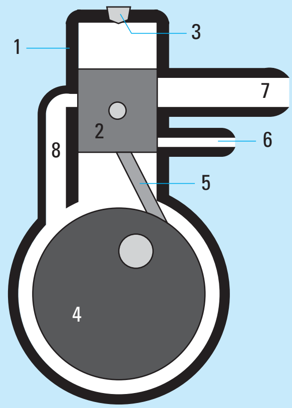
Hoek	Graden	Radialen
	90°	
	60°	
	45°	
	30°	

1.86 In een verbrandingsmotor wordt kracht opgewekt door verbranding van een brandstof. Daarbij wordt een zuiger naar beneden en naar boven bewogen. Aan het uiteinde van de drijfstang zit de krukas, zie figuur 1.44a. Deze maakt bij het op en neer bewegen van de zuiger een cirkelvormige beweging. Laten we aannemen dat de drijfstang 20 cm lang is en de diameter van de krukas 4 cm.

a Als op tijdstip $t = 0$ de drijfstang in de positie staat zoals in figuur 1.44b is aangegeven, schets dan het grafisch verloop van de hoogte h [cm] die de bovenkant A van de krukas inneemt. De cirkelvormige bewegingen van de krukas gaan rechtsom. Een totale cirkelvormige beweging duurt (vertraagd) 10 seconden.

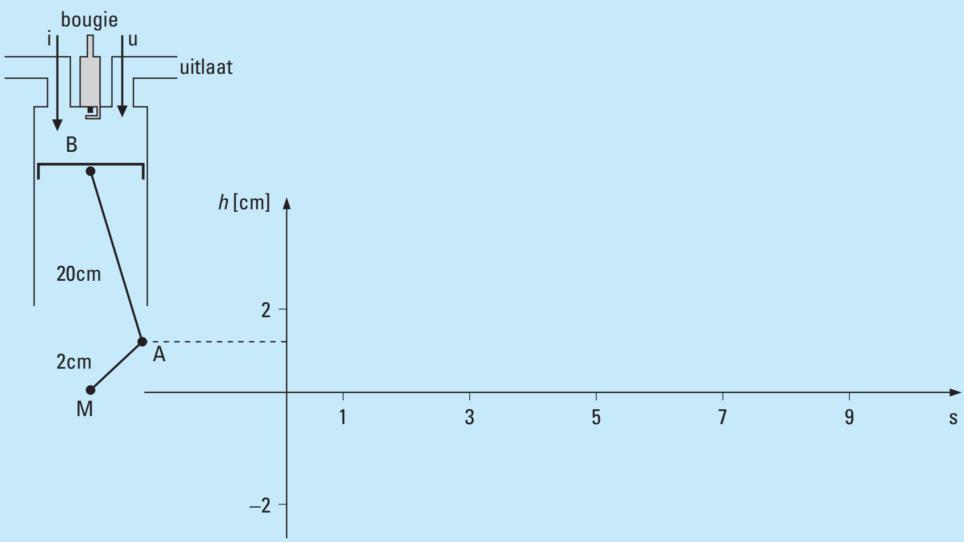
b Schets ook het grafisch verloop van de bovenkant B van de drijfstang.

Figuur 1.44a **Opwekken van kracht in een verbrandingsmotor**



Verklaring van de cijfers:
1 = cilinder
2 = zuiger
3 = bougie
4 = krukas
5 = drijfstang
6 = inlaatpoort
7 = uitlaatpoort
8 = spoelpoort

Figuur 1.44b **Drijfstang verbrandingsmotor**



1.87 Een helling heeft een hellingspercentage van 8%.

a Hoe groot is de hellingshoek in radialen?

b Hoeveel meter moeten we rijden als we 150 meter horizontaal afleggen?

c Hoeveel meter moeten we rijden als we 400 meter horizontaal afleggen?

UITLEG

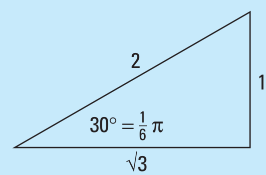
Met de theorie uit paragrafen 1.5.1 en 1.5.2 kunnen bepaalde goniometrische verhoudingen exact berekend worden. Verder komen eigenschappen van sin, cos en tan aan de orde die gebaseerd zijn op punt- of lijnsymmetrie. Je hebt al gemerkt dat de sinus- en cosinusgrafiek samenvallen als je horizontale verschuiving toepast. Een beknopte weergave van de theorie staat in Samenvatting.

Gegeven:
Een hoek van $\frac{1}{6}\pi$.

Gevraagd:
De exacte uitkomst van sin $\frac{1}{6}\pi$.

Oplossing:
De uitkomsten die met het rekenapparaat of met behulp van computeralgebra verkregen worden, zijn over het algemeen niet exact. Het zijn benaderingen met 6 tot 8 cijfers achter de komma.
Om de verhouding horende bij de sinus exact te berekenen, moet je de y-coördinaat en de lengte van het draaibeen exact kunnen berekenen. In een rechthoekige driehoek met een hoek van 30°, zie figuur 1.45, is de verhouding tussen kleine rechthoekszijde, schuine zijde en grote rechtshoekszijde altijd gelijk aan $1 : 2 : \sqrt{3}$. Dus geldt $\sin \frac{1}{6}\pi = \frac{1}{2}$. Merk op dat in deze driehoek ook $\cos \frac{1}{6}\pi$, $\sin \frac{1}{3}\pi$ en $\cos \frac{1}{3}\pi$ exact te berekenen zijn.

Figuur 1.45 **Rechthoekige driehoek met een hoek van 30°**



Opdrachten

7 a Verklaar voorgaande verhouding $1 : 2 : \sqrt{3}$.
b Bepaal de verhouding tussen de rechthoekszijden en de schuine zijde in een rechthoekige driehoek met een hoek van $\frac{1}{4}\pi$.

8 Bereken de sin, cos en tan van de in tabel 1.10 aangegeven hoeken exact.

Tabel 1.10 **Functiewaarden van sin *t*, cos *t* en tan *t* met *t* in radialen**

Goniometrische functie ⇒ Hoekgrootte ⇓	**sin**	**cos**	**tan**
0			
$\frac{1}{6}\pi$			
$\frac{1}{4}\pi$			
$\frac{1}{3}\pi$			
$\frac{1}{2}\pi$			

9 Uit de grafiek van sin t blijkt dat
sin t = sin ($t + 2\pi$) = sin ($t + 4\pi$) = sin ($t - 2\pi$) = sin ($t - 6\pi$) enz.: verschuif de grafiek horizontaal 2π en 4π naar links respectievelijk 2π en 6π naar rechts. In het algemeen geldt sin t = sin ($t + 2k\pi$) voor k in $\mathbb{Z}$.

a Raadpleeg de grafieken van cos en tan. Leid een soortgelijke eigenschap af voor cos en tan. Gebruik de theorie over horizontale verschuiving.
Vanwege de puntsymmetrie van sin t in $t = 0$, geldt sin t = –sin ($-t$);
sin ($\frac{1}{6}\pi$) = –sin ($-\frac{1}{6}\pi$), enz. De sinusgrafiek voor positieve t en de sinusgrafiek voor negatieve t zijn elkaars spiegelbeeld in de t-as.

b Verklaar waarom geldt cos t = cos ($-t$) en tan t = –tan ($-t$). Maak bij de verklaring gebruik van lijn- of puntsymmetrie.

c Bereken met je rekenapparaat de volgende rij sommen en leid een relatie af tussen sin t en cos t, voor $0 \leqq t \leqq \frac{1}{2}\pi$.

sin (10°) = … en cos (80°) = … sin (47°) = … en cos (43°) = …

sin (23°) = … en cos (67°) = … sin (62°) = … en cos (28°) = …

sin (35°) = … en cos (55°) = … sin (83°) = … en cos (7°) = …

SAMENVATTING

De uitkomsten van sin, cos en tan zijn doorgaans benaderende waarden. *Exacte uitkomsten* voor sin, cos en tan staan in tabel 1.11.

Tabel 1.11 **Functiewaarden van sin *t*, cos *t* en tan *t* met *t* in radialen**

Goniometrische functie ⇒ Hoekgrootte ⇓	**sin**	**cos**	**tan**
0	0	1	0
$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$
$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	1
$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$\frac{1}{2}\pi$	1	0	–

Eigenschappen van sin, cos en tan:

Eigenschappen

1 Op basis van punt- of lijnsymmetrie geldt:
sin t = –sin ($-t$)
cos t = cos ($-t$)
tan t = –tan ($-t$)

2 sin t = cos ($\frac{1}{2}\pi - t$) (voorlopig voor $0 \leqq t \leqq \frac{1}{2}\pi$)
Natuurlijk geldt ook cos t = sin ($\frac{1}{2}\pi - t$)

VRAAGSTUKKEN

1.88 Druk uit in graden. Rond zo nodig af op één decimaal.

a 2 rad =

b $\frac{5}{4}\pi$ rad =

c $-2\frac{1}{4}\pi$ rad =

d $1\frac{2}{3}\pi$ rad =

1.89 Druk uit in radialen. Rond zo nodig af op twee decimalen.

a 57° =

b –230° =

c 20,1° =

d –410° =

1.90 Bereken exact:

a sin 225° =

b cos –45° =

c $\sin 1\frac{2}{3}\pi$

d $\tan -\frac{5}{6}\pi$

1.91 Controleer aan de hand van een aantal concrete voorbeelden en met behulp van de grafiek van sin t de eigenschap $\sin(\frac{1}{2}\pi - t) = \sin(\frac{1}{2}\pi + t)$. Verklaar deze eigenschap met behulp van lijnsymmetrie in $t = \frac{1}{2}\pi$.

1.92 In tabel 1.12 staan in de linkerkolom goniometrische verhoudingen die gelijk zijn aan een verhouding in de rechterkolom. Geef aan welke verhoudingen uit de linkerkolom bij die van de rechterkolom horen.

Tabel 1.12 **Welke uitdrukking rechts correspondeert met welke links?**

1	$\sin\frac{1}{8}\pi$	a	$-\sin -\frac{1}{5}\pi$
2	$\cos\frac{3}{10}\pi$	b	$\cos -\frac{1}{6}\pi$
3	$\tan\frac{1}{3}\pi$	c	$-\sin -\frac{1}{8}\pi$
4	$\cos\frac{1}{6}\pi$	d	$\cos\frac{3}{8}\pi$
5	$\sin\frac{2}{6}\pi$	e	$-\tan -\frac{1}{3}\pi$
6	tan 60°	f	$-\tan -\frac{1}{3}\pi$
7	sin 60°	g	$\sin\frac{1}{5}\pi$

1.5.3 De verdubbelingsformules en de sinus- en cosinusregel

In paragraaf 1.5.2 zijn verschillende eigenschappen van sinus, cosinus en tanges aan de orde geweest. In deze paragraaf worden hier nog enkele eigenschappen aan toegevoegd:

- de verdubbelingsformules;
- de sinusregel;
- de cosinusregel.

Met de verdubbelingsformules is het mogelijk de sin t en de cos t van andere hoeken dan die in paragraaf 1.5.2 aan de orde zijn geweest exact te bepalen. Met de sinus- en cosinusregel kunnen in nog meer situaties zijden en hoeken berekend worden.

UITLEG

In de volgende voorbeelden en opdrachten komen relaties aan de orde tussen sin, cos, $\sin^2$ en $\cos^2$. Deze relaties hebben namen gekregen, zoals eerder genoemd. Het eerstvolgende voorbeeld met bijbehorende opdracht gaat over de verdubbelingsformule.

1 *Gegeven:*
Een aantal waarden voor $\sin^2 t$ en $\cos^2 t$ en cos 2t.

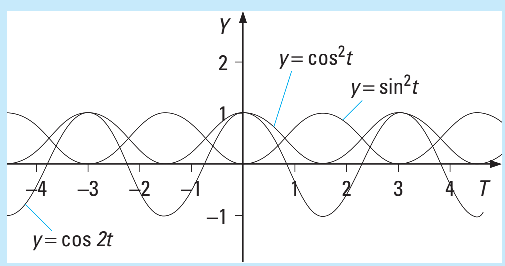
Gevraagd:
Een verband tussen $\sin^2 t$, $\cos^2 t$ en $\cos 2t$ met behulp van tabel 1.13.

Tabel 1.13 **Functiewaarden van $\sin^2 t$, $\cos^2 t$ en $\cos 2t$**

t	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$1\frac{1}{6}\pi$	$-\frac{3}{8}\pi$	$3\frac{1}{4}\pi$
$\sin^2 t$	0,25	0,5	0,75	0,25	0,854	0,5
$\cos^2 t$	0,75	0,5	0,25	0,75	0,146	0,5
$\cos 2t$	0,5	0	–0,5	0,5	–0,708	0

Oplossing:
Uit tabel 1.12 blijkt, dat je de uitkomst van $\cos 2t$ kunt berekenen uit die van $\cos^2 t$ en $\sin^2 t$ en wel als volgt:
$\cos^2 t - \sin^2 t = \cos 2t$.
In figuur 1.46 zijn de grafieken getekend van $\sin^2 t$, $\cos^2 t$ en $\cos 2t$. Duidelijk is te zien dat het verschil van de kwadraten van $\cos t$ en $\sin t$ de grafiek oplevert van $\cos 2t$.
Op het bewijs van deze betrekking zullen we verder niet ingaan.

Figuur 1.46 **$\sin^2 t$, $\cos^2 t$ en $\cos 2t$**



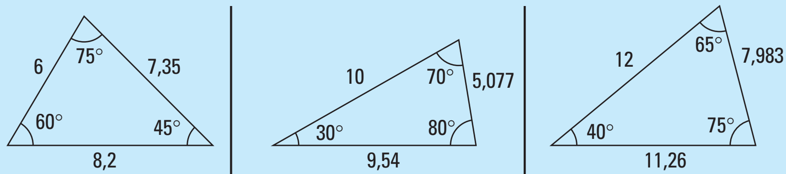
2 In dit voorbeeld komt de *sinusregel* aan de orde.

Gegeven:
Drie willekeurige scherphoekige driehoeken, zie figuur 1.47,waarvan de drie verhoudingen tussen de lengte van een zijde en de sinus van de hoek tegenover die zijde berekend zijn.

Gevraagd:
Het verband tussen deze drie verhoudingen.

Oplossing:
Merk op dat de grootste hoek tegenover de grootste zijde ligt en de kleinste hoek tegenover de kleinste zijde!

Figuur 1.47 **Scherphoekige driehoeken**



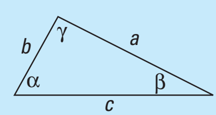
$\frac{6}{\sin 45°} = 8{,}49$	$\frac{5{,}077}{\sin 30°} = 10{,}15$	$\frac{7{,}983}{\sin 40°} = 12{,}42$
$\frac{7{,}35}{\sin 60°} = 8{,}49$	$\frac{9{,}54}{\sin 70°} = 10{,}15$	$\frac{11{,}26}{\sin 65°} = 12{,}42$
$\frac{8{,}2}{\sin 75°} = 8{,}49$	$\frac{10}{\sin 80°} = 10{,}15$	$\frac{12}{\sin 75°} = 12{,}42$

Door het voorgaande voorbeeld te bestuderen, krijg je het vermoeden, dat in een driehoek de verhoudingen tussen de lengte van een zijde en de sinus van de tegenoverliggende hoek aan elkaar gelijk zijn. Deze gelijkheid is te bewijzen en geldt ook voor stomphoekige driehoeken, driehoeken met één hoek groter dan 90°. Het bewijs ervan wordt hier achterwege gelaten. In formulevorm luidt de eigenschap:

Eigenschap

Gegeven een driehoek waarvan de lengte der zijden gelijk is aan *a*, *b* en *c*. De grootte van hoeken is gelijk aan α, β en γ. In deze driehoek geldt de volgende eigenschap (zie eigenschap 6).

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$; **de *sinusregel*.**



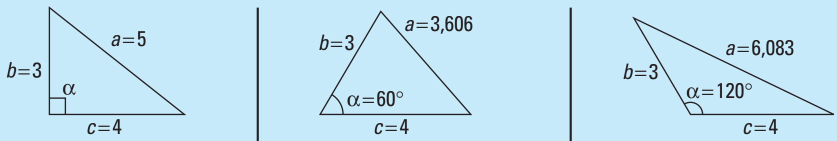
3 *Gegeven:*
Drie driehoeken met zijden a, b en c, zie figuur 1.48. Van deze driehoeken zijn berekend a^2, $b^2 + c^2$ en $2bc \cos\alpha$.

Gevraagd:
De relatie tussen a^2, $b^2 + c^2$ en $2bc \cos\alpha$, de *cosinusregel*.

Oplossing:
De grootste hoek ligt tegenover de grootste zijde en de kleinste hoek tegenover de kleinste zijde! Volgens de stelling van Pythagoras geldt in de eerste driehoek $a^2 = b^2 + c^2$. Daarom geldt in de tweede en derde driehoek respectievelijk $a^2 = b^2 + c^2 - \ldots$ en $a^2 = b^2 + c^2 + \ldots$. We gaan onderzoeken wat we op de plaats van de lege plekken moeten invullen.

Door figuur 1.48 te bestuderen, krijg je het vermoeden dat in een driehoek het kwadraat van een zijde gelijk is aan de som van de kwadraten van de andere zijden verminderd met het dubbele product van de andere zijden en de cosinus van hun ingesloten hoek. Het bewijs ervan wordt hier achterwege gelaten. In formuleform luidt de eigenschap (zie eigenschap 7).

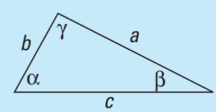
Figuur 1.48 **Driehoeken met zijden a,b, en c**



$a^2=$	25	13,003	37,003
$b^2+c^2=$	25	25	25
$2bc\cos\alpha=$	$2\cdot3\cdot4\cdot0=0$	$2\cdot3\cdot4\cdot\frac{1}{2}=12$	$2\cdot3\cdot4\cdot-\frac{1}{2}=-12$
De relatie tussen a^2, b^2+c^2 en $2bc\cos\alpha$	$a^2=b^2+c^2$	$a^2=b^2+c^2-?$; $13{,}003=25-?$ $?=11{,}997\approx12=$ $2bc\cos\alpha$	$a^2=b^2+c^2+?$; $37{,}003=25+?$ $?=12{,}003\approx12=$ $-2bc\cos\alpha$

Eigenschap

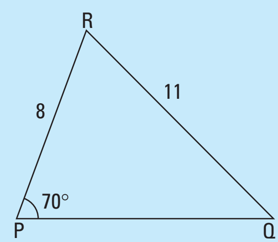
Gegeven een driehoek waarvan de lengte der zijden gelijk is aan *a, b* en *c* en de grootte van bijvoorbeeld de hoek B die gelijk is aan β. In deze driehoek geldt de volgende eigenschap.



{tegenover hoek B ligt de zijde met lengte *b*; begin dus met b^2}
$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\beta$: de *cosinusregel.*

4 *Gegeven:*
△PQR met PR = 8, QR = 11 en ∠RPQ = 70°, zie figuur 1.49.

Figuur 1.49 **Twee zijden en een hoek bekend**



Gevraagd:
PQ

Oplossing:
Uit de situatietekening blijkt, dat de hoek tegenover de gevraagde zijde PQ niet bekend is. De sinusregel is hier niet van toepassing. De cosinusregel kunnen we wel toepassen: twee van de zijden zijn bekend en een hoek.
Als de lengte van PQ gelijk is aan x, dan geldt
{start met de zijde tegenover de bekende hoek}
$11^2 = 8^2 + x^2 - 2 \cdot 8 \cdot x \cdot \cos 70° \Rightarrow$
$121 = 64 + x^2 - 5{,}47x \Rightarrow 0 = x^2 - 5{,}47x - 57$
{oplossen van een kwadratische vergelijking, zie paragraaf 1.1.3}
$x_1 = 10{,}76$ en $x_2 = -5{,}29$ (voldoet niet!)
De lengte van PQ is dus 10,76.

Opdrachten

10 Leid uit tabel 1.13 een verband af tussen $\sin^2 t$ en $\cos^2 t$.

11 Zoek met behulp van tabel 1.14 een verband tussen sin *t*, cos *t* en sin 2*t*.

Tabel 1.14 **Functiewaarden van sin *t*, cos *t* en sin 2*t***

t	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$1\frac{1}{6}\pi$	$-\frac{3}{8}\pi$	$3\frac{1}{4}\pi$
sin t	0,5	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	–0,5	–0,924	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$
cos t	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	0,5	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	0,382	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$
sin2t	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	–0,707	1

12 In △ABC is gegeven:

a ∠CAB = 40°, ∠ACB = 30° en BC = 9. Bereken AC en AB. Maak eerst een tekening!

b AB = 6, AC = 8 en ∠ABC = 50°. Bereken BC, ∠CAB en ∠ACB. Maak eerst een tekening!

13 Hoe luidt de cosinusregel voor a, b, c en α respectievelijk a, b, c en γ?

Uit voorgaande voorbeelden en opdrachten is de volgende theorie af te leiden.

SAMENVATTING

Uitbreiding eigenschappen sinus en cosinus.

Eigenschappen

3 $\cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t$; **'cosinus dubbele hoek is gelijk aan kwadraat cosinus van de hoek verminderd met kwadraat sinus van de hoek'**

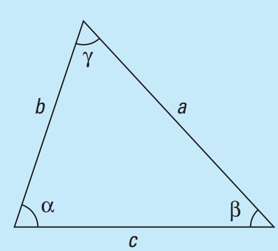
4 $\sin 2t = 2 \cdot \sin t \cdot \cos t$; **'sinus dubbele hoek is gelijk aan het dubbele product van sinus van de hoek en cosinus van de hoek'**

Deze eigenschappen worden ook wel samengevat met de benaming van *verdubbelings-* of *halveringsformules*.

5 $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$

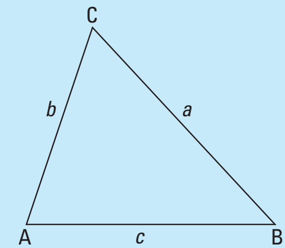
6 **De *sinusregel* geeft een betrekking weer tussen twee zijden van een driehoek en hun overstaande hoeken.**
Gegeven een driehoek waarvan de lengten der zijden gelijk zijn aan a, b en c. De grootte van de hoeken is gelijk α, β en γ, figuur 1.50. In deze driehoek geldt de volgende eigenschap: $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma}$

Figuur 1.50 **α, β, γ tegenover resp. *a*, *b* en *c***



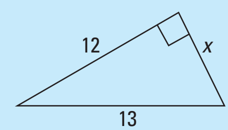
7 **De *cosinusregel* geeft een betrekking weer tussen de drie zijden van een driehoek en een hoek.**
Gegeven een driehoek waarvan de lengten der zijden gelijk zijn aan a, b en c, figuur 1.51. De grootte van $\angle A$ is bekend. In deze driehoek geldt de volgende eigenschap:
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \angle A$. Als $\angle B$ respectievelijk $\angle C$ bekend is, geldt:
$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \angle B$ respectievelijk
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \angle C$.

Figuur 1.51 **Hoekpunt A tegenover zijde *a* enz.**

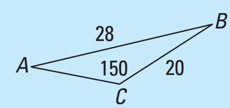


VRAAGSTUKKEN

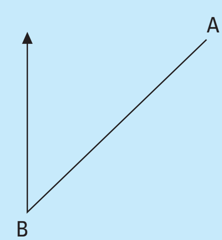
1.93 Bereken x



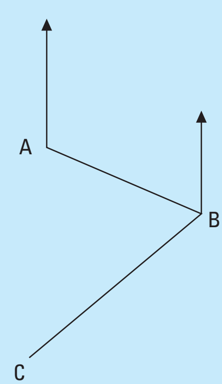
1.94 Bereken de grootte van hoek B



1.95 Richtingen in de scheep- en luchtvaart gebruiken als oriëntatierichting het noorden. Richtingen worden altijd gemeten met de wijzerrichting van de klok mee. Als bijvoorbeeld een richting als volgt wordt aangegeven: ‘de richting van B naar A is 045’, dan betekent dit dat je start in punt B en dat je van daaruit over een hoek van 45° richting punt A gaat.



Hier komt een praktijkgeval uit de scheepvaart. Een schip vaart 20 km vanuit punt A over een richting van 120° naar punt B. Van daaruit vaart het schip 30 km over een richting van 225° naar het eindpunt C.
Hoe groot is de afstand AC en de richting, gemeten in graden van A naar C?



UITLEG

In het volgende uitgewerkte voorbeeld en de bijbehorende opdrachten komen speciale eigenschappen van sin en cos aan de orde. Ze staan bekend als de som- en verschilformules. Uit het voorbeeld en de opdrachten kunnen we een aanvulling van de theorie afleiden.

Voor het exact berekenen van de cosinus of sinus van bepaalde hoeken wordt bijvoorbeeld gebruik gemaakt van de *somformules* van cosinus en sinus. Dit voorbeeld gaat over deze formules.

Gegeven:
De somformules van cosinus en sinus, $\sin(\alpha + \beta) =$
$\sin\alpha \cdot \cos\beta + \sin\beta \cdot \cos\alpha$ en $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$

Gevraagd:
1 Controleer met deze somformules de juistheid van de verdubbelingsformules.
2 Bereken zonder rekenmachine cos 75°.

Oplossing:
1 $\cos(2t) = \cos(t + t) = \cos t \cdot \cos t - \sin t \cdot \sin t = \cos^2 t - \sin^2 t$
$\sin(2t) = \sin t \cdot \cos t + \sin t \cdot \cos t = 2\sin t \cdot \cos t$
2 $\cos 75° =$ {herschrijven in standaardhoeken}
$\cos(30° + 45°) = \cos 30° \cdot \cos 45° - \sin 30° \cdot \sin 45° =$
$\frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{1}{4}\sqrt{6} - \frac{1}{4}\sqrt{2} \approx 0{,}2588.$

Opdrachten

14 Naast de somformules bestaan er nog de *verschilformules*. Toon aan, door gebruik te maken van de eigenschappen $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ en $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ (zie opdracht 9) en door voorgaand voorbeeld te raadplegen, dat geldt:
a $\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha + (-\beta)) = \sin\alpha \cdot \cos\beta - \sin\beta \cdot \cos\alpha$
b $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta$

15 Welke relatie bestaat er tussen sin, cos en tan?

16 Bereken zonder rekenmachine sin 15°, tan 15° en sin 75°, door de grootte van de hoek te herschrijven als som of verschil van de standaardhoeken 30°, 45°, 60° of 90° en door vervolgens de som- of verschilformules toe te passen.

17 In een scherphoekige driehoek ABC is $b = 15$, $\sin\alpha = \frac{12}{13}$ en $\sin\beta = \frac{4}{5}$. Bereken a en c.

Uit de voorbeelden en opdrachten lijkt de theorie als volgt aangevuld te kunnen worden:

SAMENVATTING

Nog twee eigenschappen van sinus, cosinus en één van tan:

Eigenschappen

8 De *somformules*
$\boldsymbol{\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \sin\beta \cdot \cos\alpha}$
$\boldsymbol{\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta}$

9 De *verschilformules*
$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta - \sin\beta \cdot \cos\alpha$
$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta$

De verdubbelingsformules zijn een speciale toepassing van de somformules.

10 $\tan t = \dfrac{\sin t}{\cos t}$

VRAAGSTUKKEN

1.96 Gegeven $\sin t = \frac{12}{13}$ en t in $[0, \frac{1}{2}\pi]$. Bereken $\cos t$, $\sin 2t$, $\tan 2t$, $\cos \frac{1}{2}t$ en $\sin \frac{1}{2}t$.

1.97 Bereken zonder rekenmachine $\sin(-\frac{1}{12}\pi)$, $\cos(-\frac{1}{12}\pi)$ en $\tan(-\frac{1}{12}\pi)$.

1.98 Van een parallellogram ABCD is gegeven AB = 10, BC = 7 en $\angle A = 56°$.
Bereken de oppervlakte van dit parallellogram.

1.99 In $\triangle PQR$ is $p = 9$, $q = 12$ en $r = 17{,}1$.
Bereken $\angle P$ en $\angle Q$.

1.100 Leid uit $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ af, dat $\tan^2 t + 1 = \dfrac{1}{\cos^2 t}$

1.101 Teken de grafieken van $y = \cos^2 t$ en $y = \sin^2 t$.

a Verklaar waarom beide grafieken op of geheel boven de t-as liggen.

b Teken de grafiek van $y = \cos^2 t + \sin^2 t$. Wat kun je uit deze grafiek concluderen?

Eindtoets

1 In de volgende opgaven is de goniometrische verhouding van een hoek α bekend en wordt de grootte van de hoek gevraagd. Geef eerst het domein van α aan: $[0, \frac{1}{2}\pi\rangle$, $[\frac{1}{2}\pi, \pi\rangle$, $[\pi, 1\frac{1}{2}\pi\rangle$ of $[1\frac{1}{2}\pi, 2\pi]$ en bepaal daarna de grootte van de hoek.

a $\sin \alpha = \frac{2}{3}$

b $\cos \alpha = -\frac{12}{13}$

c $\tan \alpha = 3\frac{2}{5}$

d $\sin \alpha = -1{,}2$

2 Gegeven de driehoek ABC gelegen is een rechthoekig assenstelsel. A = (0, 0), B = (10, 0) en C = (3, 5). Welke betrekking(en) geldt/gelden voor $\angle$B?

a $\sin \angle B = \frac{-5}{\sqrt{74}}$

b $\sin \angle B = \frac{5}{7}$

c $\tan \angle B = -\frac{5}{7}$

d $\sin \angle B = \frac{5}{\sqrt{74}}$

3 Vul in:

a –30° = …… rad

b 140° = …… rad

c –295° = …… rad

d $2\frac{1}{4}\pi$ rad = ……°

e –1,5 rad = ……°

f $4\frac{1}{3}\pi$ rad = ……°

4 Vul in:

a sin 37° = cos……°

b cos 205° = sin……°

c sin 102° = –cos……°

d cos 300° = –sin……°

5 Bereken zonder rekenapparaat, door gebruik te maken van som en/of verschilformules:

a sin 105° =

b cos 195° =

c sin (–195°) =

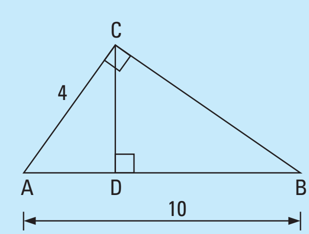
d tan 345° =

6 In △ABC is $a = 8$, $b = 4$ en $\gamma = 60°$.
Bereken c met de cosinusregel en α met de sinusregel.
Bereken vervolgens β.

7 *Gegeven:*
△ABC, zie figuur 1.52

Gevraagd:
Bereken CD in één decimaal nauwkeurig.

Figuur 1.52 **△ABC**



8 Gegeven is $\cos t = -\frac{4}{5}$ voor $\frac{1}{2}\pi < t < \pi$.
Welke van de onderstaande beweringen is juist?

a $\sin 2t = \frac{7}{25}$

b $\tan 2t = -\frac{24}{7}$

c $\cos 2t = -\frac{24}{25}$

d $\sin t = -\frac{3}{4}$